关于蛋圆方程的一点儿分析及蛋圆方程在 AI 上的应用

王冬[1] 王宇航[2]

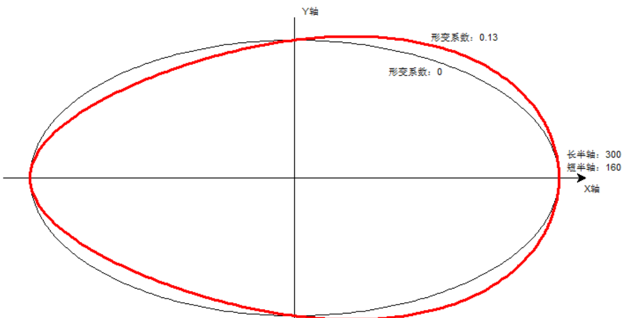
(1)辽宁省丹东市东港大顶中学，辽宁丹东 118304
(2)成都理工大学工程技术学院，四川乐山 614000

摘要：在数学中，椭圆是平面上到两个固定点距离之和等于常数的点的轨迹，可以写成 x=acost；y=bsint 形式。在此之前，好像还没有一个公式能够完整地描述蛋的形状，通常把一个半圆与二次函数图像的一部分合成的封闭图形称为“蛋圆”。今天，提供如下极坐标方程：x=acost；y=(kx+b)sint（0<|k|<1)，来为大家解析“蛋圆”的一点知识。

关键词：椭圆，蛋圆曲线，极坐标方程，AI，人脸识别

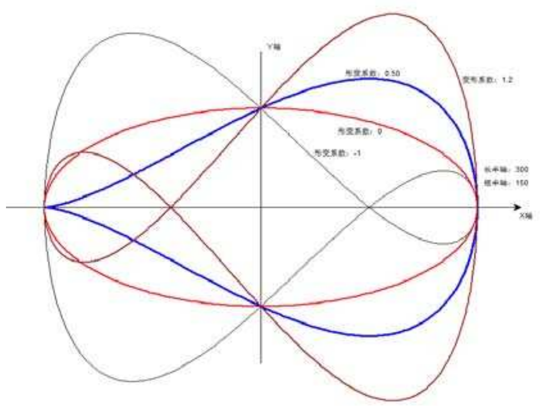
2000 年夏天，捡到块巴掌大的报纸，上面写着 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(kx+b)^2}=$ ，当时 y 项下大体能够看出好像是个 kx，字母 b 位置只能看到上部半根竖线…这是个什么？椭圆？

秋天，根据极坐标定义：x=acost；y=(kx+b)sint，利用 VB 程序画出了图像，是个蛋圆…



图一：蛋圆曲线

今年，看了 Python 编程，重新设计了程序。k 值，姑且称为“形变系数”吧。因为好奇，k 依次取以下各值：-1、-0.50、0、0.13、0.31、0.50、0.618、0.86、1、1.2、2。发现随着|k|的增大，|b/(ka)|逐渐趋近于 1，在|b/(ka)|=1 出现尖桃状，随即当|b/(ka)|<1 后，出现 8 字环。



图二：蛋圆曲线随|b/(ka)|≤1 出现尖桃与 8 字环

那么 8 字环与 x 轴的交点的坐标 x_0 是多少呢？经分析发现 y=(kx+b)sint=0 时，前两种情况 t=0、t=π 时 y=0。第三种情况就是 kx+b=0，即 kacost+b=0，即当 cost=-b/(ka)时，蛋圆与 x 轴有第三交点，x_0=-b/k。|b/(ka)|=1，是 8 字环出现的临界点。

通过观察图一，好像该蛋圆相较于等长半轴等短半轴椭圆在第一象限增加的面积等于该蛋圆相较于等长半轴等短半轴椭圆在第二象限减少的面积，是否正确呢？可以积分验证下：

dx=-asintdt，则第一象限的蛋圆面积 S_1=∫ydx=∫(kx+b)sint*(-asint)dt(π/2 到 0)。

S_1=∫(-ka^{2}costsintsint-absintsint)dt(π/2 到 0)

S_1= ka^2/3+πab/4

则第二象限的蛋圆面积：

S_2=-ka^2/3+πab/4

|ΔS_1|=|S_1-πab/4|=|ka^2/3|，|ΔS_2|=|πab/4-S_2|=|ka^2/3|，所以，上述估计是正确的。

整个蛋圆面积是 2(S_1+S_2)=πab。该蛋圆面积与等短半轴等长半轴椭圆面积相等。

因此可以估计，相较于某一 0<|x_0|<a，该蛋圆曲线上左右两横坐标对称动点（-x_0,y_0^-）和动点（+x_0,y_0^+)，各对应的纵坐标 y_0^- 和 y_0^+ 与 y_0 变化量应该有|Δh$^-$|=|Δh$^+$|=Δh，即|Δh$^-$|=|y_0-y_0^-|=|Δh|，|Δh$^+$|=|y_0^+-y_0|=|Δh|。点（x_0，y_0）为椭圆方程($\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$)上一动点。

因为 x_0=acost_0，所以-x_0=-acost_0=acos(π-t_0)。即 x_0 对应 t_0，-x_0 对应(π-t_0)。

y=(kx+b)sint，所以有：

y_0^+=(kacost_0+b)sint_0=kacos$t_0$sint_0+bsint_0=ka/2sin2t_0+y_0；

y_0^-=-ka/2sin2t_0+y_0;

|Δh$^+$|=|y_0^+-y_0|=|ka/2sin2t_0|，|Δh$^-$|=|y_0-y_0^-|=|ka/2sin2t_0|，可见上述估计是正确的。

亦可对 y 微分，结果如下：

dy=[(kacost+b)’sint+(kacost+b)cost]dt

=(kacos2t+bcost)dt

y_0^+=∫(kacos2t+bcost)dt，(0 到 t_0)

= ka/2sin2t_0+ y_0

y_0^-=∫(kacos2t+bcost)dt，(π 到 π-t_0)

=-ka/2sin2t_0+ y_0

结果亦同。

对 dy 积分求第一象限面积 S_1，则 S_1=∫xdy=∫acost(kacos2t+bcost)dt(0 到 π/2)

S_1=ka^2/3+πab/4，S_2=-ka^2/3+πab/4，与前述结论亦同。

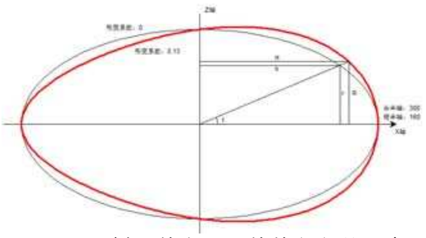
假设有椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ，以其长轴 x 轴为旋转轴线所成的旋转体，则 z 轴短半轴 c=b，其 x 轴正半轴体积积分公式为：

dV_+=πr^{2}dh=π(bsint)^2(acost)’dt(π/2 到 0)

V_+=2πab^2/3

dV_-=πr^{2}dh=π(bsint)^2(acost)’dt(π 到 π/2)

V_-=2πab^2/3



图三：椭圆体和蛋圆体体积积分示意图

那么有蛋圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(kx+b)^2}=1$，以其长轴 x 轴为旋转轴线所成的旋转体体积，与等长半轴等短半轴的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 以其长轴 x 轴为旋转轴线所成的旋转体体积也能相等吗？

想象图三，则相较于某一 $0<|x_0|<a$，该蛋圆曲线上左右两横坐标对称动点（$-x_0,y_0^-$）和动点（$+x_0,y_0^+$）将在如上旋转体的 x 正半轴方向，成 $|y_0^+|$ 为半径的圆，在 x 负半轴方向成 $|y_0^-|$ 为半径的圆。如果以长轴 x 轴为法线垂直投影到 y 轴 z 轴相交平面，则可以看到半径依次为 $|y_0^-|$，$|y_0|$，$|y_0^+|$ 三个同心圆，(0<k<1)。很显然 $|y_0^-|<|y_0|<|y_0^+|$（0<k<1）。$\pi(y_0^-)^2<\pi(y_0)^2<\pi(y_0^+)^2$。所以在 x 轴正半轴以 $\pi(y_0^+)^2$（$y_0\to y_0^+$）为底面积的积分体积必定大于 x 轴负半轴以 $\pi(y_0^-)^2$（$y_0^-\to y_0$）为底面积的积分体积。

现以蛋圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(kx+b)^2}=1$ 以其长轴 x 轴为旋转轴线所成的旋转体体积（c=b），则其 x 轴正半轴体积可以积分为：

$dV_1=\pi R^2dH=\pi[(ka\cos t+b)\sin t]^2(a\cos t)'\,dt$ （π/2 到 0）

$=-\pi a(k^2a^2\cos t^{\wedge}2\sin t^{\wedge}3+2kab\cos t\sin t^{\wedge}3)\,dt+(-\pi ab^2\sin t^{\wedge}3)dt$

$V_1=\pi ka^2(2ka/15+b/2)+2\pi ab^2/3$，$(2ka/15+b/2)>0$，很显然 $V_1>2\pi ab^2/3$。

则蛋圆其 x 轴负半轴体积可以积分为：

$dV_2=-\pi a(k^2a^2\cos t^{\wedge}2\sin t^{\wedge}3+2kab\cos t\sin t^{\wedge}3)\,dt+(-\pi ab^2\sin t^{\wedge}3)dt$ （π 到 π/2）

$V_2=\pi ka^2(2ka/15-b/2)+2\pi ab^2/3$，$(2ka/15-b/2)<0$，很显然 $V_2<2\pi ab^2/3$。

$|\Delta V^+|=|V_1-2\pi ab^2/3|=|\pi ka^2(2ka/15+b/2)|$，$|\Delta V^-|=|2\pi ab^2/3-V_2|=|\pi ka^2(2ka/15-b/2)|$，

$|\Delta V^+|>|\Delta V^-|$，说明蛋圆在 x 轴正方向部分体积增加的更大些，其实这也可以理解。就好比一个直角三角形，在一条直角边上有两段相等的线段，虽然这两条线段与顶点所构成的两个三角形面积相等，但是如果该直角三角形绕另一条直角边旋转，则离旋转轴远的那条线段所在的三角形扫过的空间体积更大。

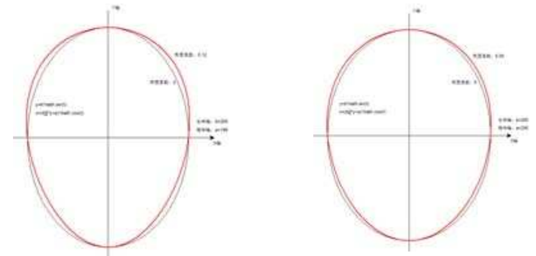
两者体积相加：$V_1+V_2=4\pi ka^2ka/15+4\pi ab^2/3>4\pi ab^2/3$，就是说蛋圆以其长轴 x 轴为旋转轴线所成的旋转体体积（c=b），要大于等长半轴等短半轴椭圆以其长轴 x 轴为旋转轴线所成的旋转体体积（c=b）。

关于蛋圆方程在 AI 上的应用，也许可以用在人脸识别场景。

传统 AI 人脸识别的工作原理首先是预处理阶段采集人脸或图片生成以人脸大框横纵边界为主的矩形框架，后期再加之眼睛、口、鼻等位置、大小数据等形成一系列数据矩阵，再通过与数据库中一系列数据的对比、识别…

如果细细观察人脸，人脸采用长方形框架来描述很粗略，完全可以用椭圆来更精确地框取，或者再对每人的嘴巴形状加以刻画，在预处理阶段，至少可以分为尖嘴巴类型、胖嘴巴类型…那将会对人脸数据库已采集数据再细分两类或更多类，搜索时间将会减少到二分之一或更少，准确度也将增加一倍或数倍…

用椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，(a<b) 来框取人脸可以理解，但是这个尖嘴巴该如何引入一个参数来修正呢？现在来引入上述蛋圆方程：$\frac{x^2}{(ky+a)^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，②(a<b，k<1)，方程式②极坐标形式为 y=b*sin(t)，x=(k*y+a)*cos(t)。通过改变 k 值，可以得到一系列的类似人脸的蛋圆曲线，可以很好地刻画嘴巴这一形状。



a=190、b=260、k=0.12　　a=200、b=260、k=0.08

表一：不同的 a、b、k 值脸型示意图

蛋圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(kx+b)^2}=1$ 其他可能的用途可能有：飞机机翼外形、鱼雷流线型外形、船体前端低阻力破浪体外形、船用螺旋桨桨叶设计，无轴泵推桨叶设计、超音速飞行体外形等设计，以及飞行体后端避免形成涡流而进行的修正…

1.高等数学.第七版上.同济大学数学系.高等教育出版社