

函数对称性的探究

◆张光海

(四川省剑阁中学校)

函数是中学数学教学的主线,是高中数学的核心内容,也是整个高中数学的基础。函数的性质是高考命题的重点与热点,函数的对称性是函数的一个基本性质,对称关系不仅广泛存在于数学问题之中,而且利用对称性往往能更简捷地使问题得到解决,对称关系还充分体现了数学之美。下面将通过函数自身的对称性和不同函数之间的对称性这两个方面来探讨函数与对称有关的性质。

一、函数自身的对称性探究

定理 1. 函数 $y = f(x)$ 的图像关于点 $A(a, b)$ 对称的充要条件是 $f(x) + f(2a - x) = 2b$

证明: (必要性) 设点 $P(x, y)$ 是 $y = f(x)$ 图像上任一点, $\therefore$ 点 $P(x, y)$ 关于点 $A(a, b)$ 的对称点 $P'(2a - x, 2b - y)$ 也在 $y = f(x)$ 图像上, $\therefore 2b - y = f(2a - x)$

即 $y + f(2a - x) = 2b$ 故 $f(x) + f(2a - x) = 2b$, 必要性得证。

(充分性) 设点 $P(x_0, y_0)$ 是 $y = f(x)$ 图像上任一点, 则 $y_0 = f(x_0)$

$\therefore f(x) + f(2a - x) = 2b \therefore f(x_0) + f(2a - x_0) = 2b$, 即 $2b - y_0 = f(2a - x_0)$ 。

故点 $P'(2a - x_0, 2b - y_0)$ 也在 $y = f(x)$ 图像上, 而点 P 与点 P' 关于点 $A(a, b)$ 对称, 充分性得证。

推论: 函数 $y = f(x)$ 的图像关于原点 O 对称的充要条件是 $f(x) + f(-x) = 0$

定理 2. 函数 $y = f(x)$ 的图像关于直线 $x = a$ 对称的充要条件是

$f(a + x) = f(a - x)$ 即 $f(x) = f(2a - x)$

推论: 函数 $y = f(x)$ 的图像关于 y 轴对称的充要条件是 $f(x) = f(-x)$

定理 3. ①若函数 $y = f(x)$ 图像同时关于点 $A(a, c)$ 和点 $B(b, c)$ 成中心对称 ($a \neq b$), 则 $y = f(x)$ 是周期函数, 且 $2|a - b|$ 是其一个周期。

②若函数 $y = f(x)$ 图像同时关于直线 $x = a$ 和直线 $x = b$ 成轴对称 ($a \neq b$), 则 $y = f(x)$ 是周期函数, 且 $2|a - b|$ 是其一个周期。

③若函数 $y = f(x)$ 图像既关于点 $A(a, c)$ 成中心对称又关于直线 $x = b$ 成轴对称 ($a \neq b$), 则 $y = f(x)$ 是周期函数, 且 $4|a - b|$ 是其一个周期。

下面给出③的证明:

$\therefore$ 函数 $y = f(x)$ 图像既关于点 $A(a, c)$ 成中心对称,

$\therefore f(x) + f(2a - x) = 2c$, 用 $2b - x$ 代 x 得:

$f(2b - x) + f[2a - (2b - x)] = 2c \dots\dots\dots (*)$

又 $\therefore$ 函数 $y = f(x)$ 图像关于直线 $x = b$ 成轴对称,

$\therefore f(2b - x) = f(x)$ 代入 (*) 得:

$f(x) = 2c - f[2(a - b) + x] \dots\dots\dots (**)$, 用 $2(a - b) - x$ 代 x 得

$f[2(a - b) + x] = 2c - f[4(a - b) + x]$ 代入 (**) 得:

$f(x) = f[4(a - b) + x]$, 故 $y = f(x)$ 是周期函数, 且 $4|a - b|$ 是其一个周期。

二、不同函数对称性的探究

定理 4. 函数 $y = f(x)$ 与 $y = 2b - f(2a - x)$ 的图像关于点 $A(a, b)$ 成中心对称。

定理 5. ①函数 $y = f(x)$ 与 $y = f(2a - x)$ 的图像关于直线 $x = a$ 成轴对称。

②函数 $y = f(x)$ 与 $a - x = f(a - y)$ 的图像关于直线 $x + y = a$ 成轴对称。

③函数 $y = f(x)$ 与 $x - a = f(y + a)$ 的图像关于直线 $x - y = a$ 成轴对称。

定理 4 与定理 5 中的①②证明留给读者, 现证定理 5 中的③

设点 $P(x_0, y_0)$ 是 $y = f(x)$ 图像上任一点, 则 $y_0 = f(x_0)$ 。记点 $P(x, y)$ 关于直线 $x - y = a$ 的轴对称点为 $P'(x_1, y_1)$, 则 $x_1 = a + y_0, y_1 = x_0 - a$, $\therefore x_0 = a + y_1, y_0 = x_1 - a$ 代入 $y_0 = f(x_0)$ 之中得 $x_1 - a = f(a + y_1)$ $\therefore$ 点 $P'(x_1, y_1)$ 在函数 $x - a = f(y + a)$ 的图

像上。

同理可证: 函数 $x - a = f(y + a)$ 的图像上任一点关于直线 $x - y = a$ 的轴对称点也在函数 $y = f(x)$ 的图像上。故定理 5 中的③成立。

推论: 函数 $y = f(x)$ 的图像与 $x = f(y)$ 的图像关于直线 $x = y$ 成轴对称。

三、三角函数图像的对称性列表

函 数	对称中心坐标	对称轴方程
$y = \sin x$	$(k\pi, 0)$	$x = k\pi + \pi/2$
$y = \cos x$	$(k\pi + \pi/2, 0)$	$x = k\pi$
$y = \tan x$	$(k\pi/2, 0)$	无

注: ①上表中 $k \in \mathbb{Z}$

② $y = \tan x$ 的所有对称中心坐标应该是 $(k\pi/2, 0)$, 而在岑申、王而治主编的浙江教育出版社出版的 21 世纪高中数学精编第一册(下)及陈兆镇主编的广西师大出版社出版的高一数学新教案(修订版)中都认为 $y = \tan x$ 的所有对称中心坐标是 $(k\pi, 0)$, 这明显是错的。

四、函数对称性应用举例

例 1: 定义在 $\mathbb{R}$ 上的非常数函数满足: $f(10+x)$ 为偶函数, 且 $f(5-x) = f(5+x)$, 则 $f(x)$ 一定是 ()

(A) 是偶函数, 也是周期函数 (B) 是偶函数, 但不是周期函数
(C) 是奇函数, 也是周期函数 (D) 是奇函数, 但不是周期函数

解: $\therefore f(10+x)$ 为偶函数, $\therefore f(10+x) = f(10-x)$ 。

$\therefore f(x)$ 有两条对称轴 $x = 5$ 与 $x = 10$, 因此 $f(x)$ 是以 10 为其一个周期的周期函数, $\therefore x = 0$ 即 y 轴也是 $f(x)$ 的对称轴, 因此 $f(x)$ 还是一个偶函数。

故选(A)

例 2: 设定义域为 $\mathbb{R}$ 的函数 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ 都有反函数, 并且 $f(x-1)$ 和 $g-1(x-2)$ 函数的图像关于直线 $y = x$ 对称, 若 $g(5) = 1999$, 那么 $f(4) = ()$ 。

(A) 1999; (B) 2000; (C) 2001; (D) 2002。

解: $\therefore y = f(x-1)$ 和 $y = g-1(x-2)$ 函数的图像关于直线 $y = x$ 对称,

$\therefore y = g-1(x-2)$ 反函数是 $y = f(x-1)$, 而 $y = g-1(x-2)$ 的反函数是: $y = 2 + g(x)$, $\therefore f(x-1) = 2 + g(x)$, $\therefore f(5-1) = 2 + g(5) = 2001$ 故 $f(4) = 2001$, 应选 (C)

例 3. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数, 且 $f(1+x) = f(1-x)$, 当 $-1 \leq x \leq 0$ 时,

$f(x) = -\frac{1}{2}x$, 则 $f(8.6) = \underline{\hspace{2cm}}$ (第八届希望杯高二 第二试)

一试题)

解: $\therefore f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数 $\therefore x = 0$ 是 $y = f(x)$ 对称轴;

又 $\therefore f(1+x) = f(1-x)$ $\therefore x = 1$ 也是 $y = f(x)$ 对称轴。故 $y = f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数, $\therefore f(8.6) = f(8+0.6) = f(0.6) = f(-0.6) = 0.3$

例 4. 函数 $y = \sin(2x + \frac{5\pi}{2})$ 的图像的一条对称轴的方程是 () (92 全国高考理)

(A) $x = -\frac{\pi}{2}$ (B) $x = -\frac{\pi}{4}$

(C) $x = \frac{\pi}{8}$ (D) $x = \frac{5\pi}{4}$

解: 函数 $y = \sin(2x + \frac{5\pi}{2})$ 的图像的所有对称轴的方程是 $2x + \frac{5\pi}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2}$ $\therefore x = \frac{k\pi}{2} - \pi$, 显然取 $k = 1$ 时的对称

轴方程是 $x = -\frac{\pi}{2}$ 故选(A)