

抛体的包络线方程的推导

◆刘智美

(广东省中山市三鑫国际部)

生活中的抛物线处处可见。例如,在忽略空气阻力的情况下,篮球在空中划出的轨迹,可近似地看作抛物线。若我们以恒定的初速度、不同的角度抛篮球,便能得到一个抛物线族。如果我们在平面内做一条光滑曲线,使之与抛物线族里的每一条抛物线都相切于某些点,那么我们称这条曲线为抛物线族的包络线。我们可以利用其包络线与抛物线相切这一特点——即包络线与每条抛物线有且仅有一个交点,求出包络线方程。已知抛体的包络线方程,我们可以应用包络线方程巧妙解题。

1. 抛体包络线的求法

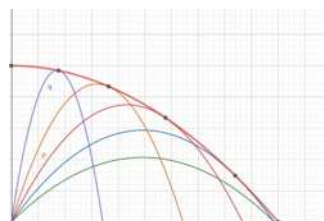
解法1: 单变量函数求导。

设抛体的初速度为 u , 仰角为 θ , 重力加速度为 g , 则有:

$$\begin{cases} x = u \cdot \cos \theta \cdot t \\ y = u \cdot \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{cases}, \text{ 消去 } t \text{ 得到抛物线的函数表达式为}$$

$$y = \tan \theta \cdot x - \frac{g \cdot \sec^2 \theta}{2u^2} x^2. \text{ 令 } \lambda = \tan \theta, \text{ 得}$$

$$y = \lambda \cdot x - \frac{g(1+\lambda^2)}{2u^2} \cdot x^2 \quad ①$$



图表1 抛物线族与其包络线

欲求包络线方程,我们发现对于某一个固定的 x 值,包络线的 y 值就是当 θ 变化时 y 的最大值(因为相切)。这时需要把 θ 当作自变量,把 x 当作常数。而 $\lambda = \tan \theta$, 于是此时 λ 为自变量。

把①进行配方得到: $y = -\frac{gx^2}{2u^2}(\lambda - \frac{u^2}{gx})^2 - \frac{gx^2}{2u^2} + \frac{u^2}{2g}$, 得包络线

$$\text{方程 } Y = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}.$$

解法2: 先以两个结论引出这个巧妙的方法。

结论1: 抛物线簇里面的每一支抛物线的准线相同。

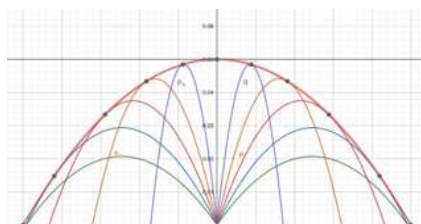
证: 将抛物线 $y = \lambda \cdot x - \frac{g(1+\lambda^2)}{2u^2} \cdot x^2$ 进行配方后得:

$$y = -\frac{g(1+\lambda^2)}{2u^2} \left(x - \frac{u^2 \lambda}{g(1+\lambda^2)} \right)^2 + \frac{u^2 \lambda^2}{2g(1+\lambda^2)}, \text{ 准线方程为: } y = \frac{u^2}{2g},$$

与仰角 θ 无关。

结论2: 物体在抛物线轨道上所具有的机械能等于物体静止在准线上所具有的势能。

证: 根据能量守恒, 抛物线上任意一点的机械能等于初始时的动能, 即 $\frac{1}{2} mu^2$; 物体静止在准线上的势能为 $mg(\frac{u^2}{2g}) = \frac{1}{2} mu^2$, 二者相等。



图表2

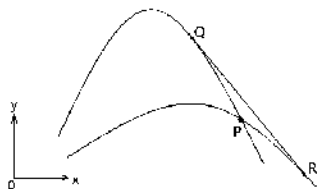
解: 由前两种解法可知, 抛体的包络线也是抛物线, 且其包络线唯一。由抛体运动轨迹的对称性知, 包络线关于 y 轴对称。因此可设包络线方程为: $y = ax^2 + b$ 。由结论2知, 抛体所能达到的最大高度为准线的高度, 即 $b = \frac{u^2}{2g}$, 如图2。根据包络线的性质

可知, 包络线可由以速度 u 的平抛轨迹向上平移 $\frac{u^2}{2g}$ 后得到。由平

抛运动有: $y = -\frac{g}{2u^2} \cdot x^2$, 则最终的包络线方程为: $Y = -\frac{gx^2}{2u^2} + \frac{u^2}{2g}$

解法3: 多变量函数求导。

在解题前我们先进行推导。



图表3 x-y平面中曲线族 $f(x, y, \alpha) = 0$ 的两个相邻的曲线。

如图3, 假设 $f(x, y, \alpha_1) = 0$ 与 $f(x, y, \alpha_1 + h) = 0$ 是一曲线族中的相邻的两个曲线, 参数 α 只相差极小量 h , 两曲线在 x - y 平面上交于 P 点。另作一条曲线, 使其与 $f(x, y, \alpha_1) = 0$ 切于 Q 点, 与 $f(x, y, \alpha_1 + h) = 0$ 切于 R 点。当 α_1 固定, $h \rightarrow 0$ 时, P 的极限位置在包络线上。当 α_1 逐渐变化而作出曲线族时, Q 的轨迹便是完整的包络线。这里, 图3的两条曲线可以视为曲面 $f = f(x, y, \alpha) = 0$ 分别交于 $\alpha = \alpha_1$ 与 $\alpha = \alpha_1 + h$ 两平面的平面曲线在 x - y 平面上的投影。沿着穿过 P 点垂直于 x - y 平面的垂线上, 当 α 从 α_1 变化到 $\alpha_1 + h$ 的过程中, $f = f(x, y, \alpha)$ 的值会偏离零, 因为只有当 $\alpha = \alpha_1$ 与 $\alpha = \alpha_1 + h$ 时 $f = f(x, y, \alpha)$ 的值相等且等于零。根据罗尔中值定理, 对于 $0 \leq \theta \leq 1$, $\exists \theta$, 使得

$$\frac{\partial f(x, y, \alpha_1 + \theta h)}{\partial \alpha} = 0, \text{ 其中 } h \text{ 任意小。于是 } P \rightarrow Q, \begin{cases} f(x, y, \alpha_1) = 0 \\ \frac{\partial f(x, y, \alpha_1)}{\partial \alpha} = 0 \end{cases},$$

通过消去方程组中的 α_1 , 得出包络线方程 $g(x, y) = 0$ 。

解: 令 $F(x, y, \theta) = -y + \tan \theta \cdot x - \frac{g \cdot \sec^2 \theta}{2u^2} x^2 = 0$, 得

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(x, y, \theta) = \sec^2 \theta \cdot x - \frac{g \cdot x^2}{u^2} \tan \theta \cdot \sec^2 \theta = \frac{x \cdot \sec^2 \theta}{u^2} (u^2 - g \cdot x \cdot \tan \theta) = 0, \tan \theta = \frac{u^2}{g \cdot x} \quad ②, \text{ 代入 } F \text{ 中得 } Y = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}.$$

2. 由抛体包络线的引申出来的结论与应用

结论1: 求此抛体距离发射点的最远距离。

解: 已知抛体包络线方程为 $Y = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}$ 。易知最远距离这个点在包络线上。设任意距离为 d , $d^2 = x^2 + y^2 = x^2 + \left(\frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2} \right)^2 = \left(\frac{u^2}{2g} + \frac{gx^2}{2u^2} \right)^2$ 。当 x 取最大值时, d 取最大值; 当 $Y = 0$, x 取最大值, 此时 $x = \frac{u^2}{g}$ 。得 $d_{\max} = \frac{u^2}{g}$ 。

结论 2: 最大射高为 $\frac{u^2}{2g}$ 。

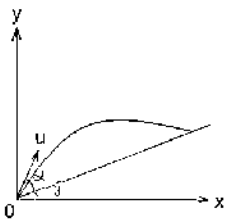
证: 令 $x=0$, 得 $Y=\frac{u^2}{2g}$ 。这也是以 u 为初速度的竖直上抛运动所达到的最大高度。

结论 3: 当仰角为 $\theta=45^\circ$ 时, 射程最大。

证: 之前已经求出最远距离为 $\frac{u^2}{g}$, 此时 $x=\frac{u^2}{g}$, $Y=0$,

代入 $y=\lambda \cdot x - \frac{g(1+\lambda^2)}{2u^2} \cdot x^2$ 可得 $\lambda=1$, $\theta=45^\circ$ 。(从 45° 角还可以得知, 当 $\theta>45^\circ$ 时, 每条轨迹都和包络线切于一点, 而 $\theta<45^\circ$ 时, 轨迹在包络线内部, 与包络线无切点)

应用: 如图 4, 在一个倾角为 θ 的斜面上以 u 为初速度发射一个物体, 求抛体沿斜面的最大射程 S 以及关于斜面的仰角 α 。



图表 4

解: 抛体在斜面上的最远射程 S 在以 u 为初速度的抛体的包

络线上。联立包络线方程与斜面的直线方程: $\begin{cases} y = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2} \\ y = \tan \theta \cdot x \end{cases}$, 解

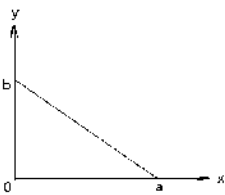
得 $x = \frac{u^2}{g}(\sec \theta - \tan \theta)$ ③, $S = \frac{x}{\cos \theta} = \frac{u^2}{g}(\sec^2 \theta - \sec \theta \cdot \tan \theta)$ 。

接下来求 α 。由②知: $\tan(\alpha + \theta) = \frac{u^2}{g \cdot x}$, 把③代入此式, 解得

$\alpha = 45^\circ - \frac{1}{2}\theta$ 。

例题

例 1: 如图 5, 一个长为 L 的梯子倚靠在一竖直墙壁上, 求梯子与墙壁和地面围成的面积的包络线方程。



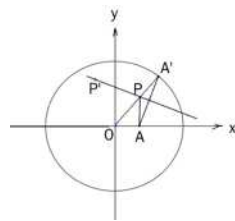
图表 5: 假设地面和墙壁分别作为 x 、 y 轴

解: $f(x, y, a) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = \frac{x}{a} + \frac{y}{(L^2 - a^2)^{1/2}} - 1 = 0$ ⑤,

$\frac{\partial f}{\partial a} = -\frac{x}{a^2} + \frac{ay}{(L^2 - a^2)^{3/2}} = 0$ ⑥, 联立⑤和⑥, 解得 $a = \frac{Lx^{1/3}}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$,

代入⑤并化简得: $x^{2/3} + y^{2/3} = L^{2/3}$ 。

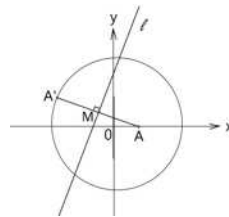
例 2: (2003 年全国高中数学联赛第 15 题) 一张纸上画有半径为 R 的圆 O 和圆内一定点 A , 且 $OA=a$, 折叠纸片, 使圆周上某一点 A' 刚好与 A 点重合。这样的每一种折法, 都留下一条直线折痕。当 A' 取遍圆周上所有点时, 求所有折痕所在直线上的点的集合。



图表 6

解法 1: 由题意知: 折痕是线段 AA' 的垂直平分线, 如图 6, 连接 O 、 A' , 交折痕于点 P , 连 A 、 P 。 P' 为折痕上除 P 点的任意一点。易知 $|AP|=|A'P|$, 则 $|OP|+|A'P|=|OP|+|AP|=R$, 故点 P 在以点 O 和点 A 为焦点, R 为长轴长的椭圆上, 焦距为 $|OA|=a$, 则半短轴长为 $\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ 。由此可知, 包络线方程为: $\frac{(x-\frac{a}{2})^2}{(\frac{R}{2})^2} + \frac{y^2}{(\frac{R}{2})^2 - (\frac{a}{2})^2} = 1$ 。

又因为 P' 在椭圆外, 则折痕上的点总在椭圆外部或椭圆上。



图表 7

解法 2: 如图 7, 设 $A'(R \cos \theta, R \sin \theta)$, 因为 $A(a, 0)$, 则直线 AA' 的斜率为 $k_{AA'} = \frac{R \sin \theta}{R \cos \theta - a}$ 。由题意知, 折痕 l 为线段 AA'

的垂直平分线, 则 l 的斜率为 $k_l = \frac{a - R \cos \theta}{R \sin \theta}$ 。线段 AA' 的中点 M 坐标为: $M(\frac{a + R \cos \theta}{2}, \frac{R \sin \theta}{2})$ 。根据点斜式可设直线 l 方程

为: $y - \frac{R \sin \theta}{2} = \frac{a - R \cos \theta}{R \sin \theta} (x - \frac{a + R \cos \theta}{2})$, 化简后得:

$y = \frac{a - R \cos \theta}{R \sin \theta} x + \frac{R^2 - a^2}{2R \sin \theta}$, 继续化简成:

$y \sin \theta + x \cos \theta = \frac{ax}{R} + \frac{R^2 - a^2}{2R}$ ⑦。设

$f(x, y, \theta) = \sin \theta y + \cos \theta x - \frac{ax}{R} - \frac{R^2 - a^2}{2R} = 0$,

$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \cos \theta y - \sin \theta x = 0$, 解得: $\tan \theta = \frac{y}{x}$ 。则有: $\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, 代入⑦: $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{ax}{R} + \frac{R^2 - a^2}{2R}$, 整理后得:

$\frac{(x - \frac{a}{2})^2}{(\frac{R}{2})^2} + \frac{y^2}{(\frac{R}{2})^2 - (\frac{a}{2})^2} = 1$ 。所有折痕所在直线上的点的集合为:

$\{(x, y) | \frac{(x - \frac{a}{2})^2}{(\frac{R}{2})^2} + \frac{y^2}{(\frac{R}{2})^2 - (\frac{a}{2})^2} \geq 1\}$

参考文献:

- [1]《Mathematical Method for Science and Engineering》Cambridge University Press
- [2]董慎行, 抛体包络线方程的推导及其应用例举, 物理教师, 2007, 28(12):
- [3]张伟新, 杨利刚, 美丽的包络线——从一道全国高中数学联赛题谈起, 中学数学, 215600