盛金公式在求解双跨梁过程中的应用

陈彩虹
中国轻工业长沙工程有限公司 湖南 长沙 410000

【摘　要】利用盛金公式推导了不等跨双跨梁在均布荷载作用下的挠度计算公式，为幕墙结构的快速计算提供了技术支持。

【关键词】盛金公式；双跨梁；求解；内力；挠度；

1.概述

幕墙的立柱，是幕墙的“骨架”，如何设计幕墙立柱，选择合理的计算分析方法，是保证幕墙结构安全和提高经济性能的关键环节。在工程实践中，当主体建筑的楼层跨度较大时，为了提高幕墙立柱的安全性和提高幕墙设计的经济性能，我们通常会将立柱设计为双跨梁的结构型式，并采用双跨梁力学模型进行分析计算。

因幕墙的构造形式复杂多样，幕墙结构的计算依然没有全面的标准化的计算软件，大部分幕墙承包商目前设计还采用手算方式，这时，计算双跨梁结构型式立柱，结构工程师需要按照结构设计手册查弯矩和挠度系数等。[1]

而对于双跨梁，结构静力计算手册中只有等跨梁的挠度系数。

本文利用盛金公式推导了不等跨双跨梁在均布荷载作用下的内力及挠度计算公式，结构工程师可以利用公式做成 EXCEL 表格进行计算，出具计算书，大大提高设计效率。

2.双跨梁结构型式立柱计算简图

由于幕墙立柱所受水平荷载可以简化为呈线性分布的矩形荷载，假设其荷载集度为 q，立柱的计算长度为 l，则立柱双跨梁力学计算模型的计算简图如图 1 所示。该力学模型边界条件为：在平面内，立柱共有三个支座，分别是支座 A、支座 B 和支座 C。立柱几何参数：长度 l、长跨 a、短跨 b 和比例因子 λ =b/l。

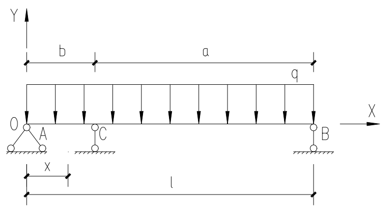

图 1 立柱双跨梁力学计算模型的计算简图

3.求解双跨梁支座反力

假设立柱材料的弹性模量为 E，其截面对中性轴的惯性矩为 I。双跨梁为超静定结构，采用力法求解。去掉支座 C，

以 RC 代替，得到基本体系如图 2 所示。

据 x=b 处位移为 0，建立方程：Δbq+ΔbRc=0。其中，挠度以向上为正（即 y 轴正方向为正）。

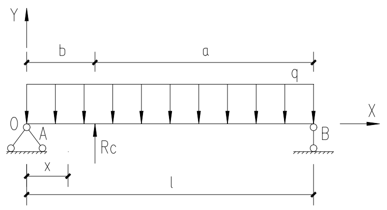

图 2 立柱双跨梁的基本体系

查静力计算手册，在均布荷载 q 作用下，x=b 处挠度为：

$$\Delta b_q=\frac{1}{EI}\left(\frac{qlb^3}{12}-\frac{qb^4}{24}-\frac{ql^3b}{24}\right)$$

采用图乘法计算，在集中荷载 RC 作用下，x=b 处挠度为：

$$\Delta b_{Rc}=\frac{R_C\cdot a\cdot b}{6EI\cdot l}\left(l^2-a^2-b^2\right)$$

代入方程Δbq+ΔbRc=0。得：

$$R_C=-\frac{1}{\lambda(1-\lambda)^2}\left(\frac{\lambda^2}{4}-\frac{\lambda^3}{8}-\frac{1}{8}\right)ql,\ \lambda=\frac{b}{l}$$

$$R_B=\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{(1-\lambda)^2}\left(\frac{\lambda^2}{4}-\frac{\lambda^3}{8}-\frac{1}{8}\right)\right]ql$$

$$R_A=\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\lambda(1-\lambda)}\left(\frac{\lambda^2}{4}-\frac{\lambda^3}{8}-\frac{1}{8}\right)\right]ql$$

其中，RA、RB、RC 以向上为正（即 y 轴正方向为正）。

4.盛金公式介绍

标准型的一元三次方程 aX3+bX2+cX+d=0（a，b，c，d∈R，且 a≠0），其解法有：1、意大利学者卡尔丹于 1545 年发表的卡尔丹公式法；2、中国学者范盛金于 1989 年发表的盛金公式法。两种公式法都可以解标准型的一元三次方程，用卡尔丹公式解题方便，用盛金公式解题更为直观。

盛金公式为：

$$\begin{cases}A=b^2-3ac;\\B=bc-9ad;\\C=c^2-3bd,\end{cases}$$

一元三次方程 aX3+bX2+cX+d=0（a，b，c，d∈R，且 a≠0）；

重根判别式：

总判别式：

$$\Delta=B^2-4AC$$

当 A=B=0,盛金公式 1：

$$X_1=X_2=X_3=\frac{-b}{3a}=\frac{-c}{b}=\frac{-3d}{c}$$

当 $\Delta=B^2-4AC>0$ 时，盛金公式 2：

$$\begin{cases}X_1=\dfrac{-b-\left(\sqrt[3]{Y_1}+\sqrt[3]{Y_2}\right)}{3a};\\X_{2,3}=\dfrac{-b+\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{Y_1}+\sqrt[3]{Y_2}\right)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{Y_1}-\sqrt[3]{Y_2}\right)i}{3a};\end{cases}$$

$$其中Y_{1,2}=Ab+3a\left(\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2}\right),i^2=-1。$$

当 $\Delta=B^2-4AC=0$ 时，盛金公式 3：

$$\begin{cases}X_1=\dfrac{-b}{a}+K;\\X_2=X_3=\dfrac{-K}{2};\end{cases}其中，K=\frac{B}{A},(A\neq0)。$$

$$\begin{cases}X_1=\dfrac{-b-2\sqrt{A}\cos\frac{\theta}{3}}{3a};\\X_{2,3}=\dfrac{-b+\sqrt{A}\left(\cos\frac{\theta}{3}\pm\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}\right)}{3a};\end{cases}$$

当 $\Delta=B^2-4AC<0$ 时，盛金公式 4：

$$其中\theta=\arccos T,T=\frac{2Ab-3aB}{2\sqrt{A^3}}(A>0,-1<T<1)$$

5.利用盛金公式求解双跨梁最大挠度

在求出各支座反力（RA、RB、RC）的基础上，可以得到双跨梁任意截面上的挠度 fx。其中，挠度以向上为正（即 y 轴正方向为正）。

当 0≦x≦b 时，

$$f_x=\frac{1}{EI}\left(\frac{qlx^3}{12}-\frac{qx^4}{24}-\frac{ql^3x}{24}\right)+\frac{R_C\cdot a\cdot x}{6EI\cdot l}(l^2-a^2-x^2)\qquad(1\text{-}1)$$

当 b≦x≦l 时，

$$f_x=\frac{1}{EI}\left(\frac{qlx^3}{12}-\frac{qx^4}{24}-\frac{ql^3x}{24}\right)+\frac{R_C\cdot a}{6EI\cdot l}\left[(l^2-a^2-x^2)x+\frac{l}{a}(x-b)^3\right] \quad (1\text{-}2)$$

在此基础上，对 fx 求导求解最大挠度。因 fx 为 x 的四次方程，则 fx’为 x 的三次方程。现采用盛金公式求解双跨梁的最大挠度。

很显然，不等跨双跨梁最大挠度将产生在长跨范围内，所以可按式(1-2)来求解最大挠度。

将 RC 代入，并化简得：

$$f_x=\frac{1}{EI}\left(\frac{qlx^3}{12}-\frac{qx^4}{24}-\frac{ql^3x}{24}\right)$$
$$+\frac{\mu_C\cdot ql}{6EI}\left\{(1-\lambda)\left[\lambda l^2(2-\lambda)-x^2\right]x+(x-\lambda l)^3\right\},\ b\le x\le l \quad (1\text{-}3)$$

其中，

$$\mu_C=-\frac{1}{\lambda(1-\lambda)^2}\left(\frac{\lambda^2}{4}-\frac{\lambda^3}{8}-\frac{1}{8}\right)$$

截面位置以 $x=\varphi\cdot l$ 表示，

$$f_x=\alpha\frac{ql^4}{EI}$$ 令，

并命名 α 为挠度系数。则由式（1-3）可得：

$$\alpha=\frac{1}{24}(2\varphi^3-\varphi^4-\varphi)$$
$$+\frac{\mu_C}{6}\left[(1-\lambda)\varphi\left(2\lambda-\lambda^2-\varphi^2\right)+(\varphi-\lambda)^3\right],\ \frac{b}{l}\le\varphi\le 1 \quad (1\text{-}4)$$

因对于特定的双跨梁 ql4/EI 为常数，所以对挠度系数 α 求导即可求得挠度最大的截面位置。对 α 求导得：

$$-\alpha'=\frac{1}{6}\varphi^3-\left(\frac{1}{4}+\frac{\mu_c\lambda}{2}\right)\varphi^2+\mu_c\lambda\varphi+\frac{1}{24}-\frac{\mu_c\left(\lambda^3+2\lambda\right)}{6},\ \frac{b}{l}\le\varphi\le 1 \quad (1\text{-}5)$$

令 $\alpha'=0$，即求解一元三次方程：

$$\frac{1}{6}\varphi^3-\left(\frac{1}{4}+\frac{\mu_c\lambda}{2}\right)\varphi^2+\mu_c\lambda\varphi+\frac{1}{24}-\frac{\mu_c\left(\lambda^3+2\lambda\right)}{6}=0 \quad (1\text{-}6)$$

利用盛金公式求解式（1-6）。则：

$$A=b^2-3ac=\left(\frac{1}{4}-\frac{\mu_c\lambda}{2}\right)^2;$$

$$a=\frac{1}{6};\quad b=-\left(\frac{1}{4}+\frac{\mu_c\lambda}{2}\right);\quad c=\mu_c\lambda;\quad d=\frac{1}{24}-\frac{\mu_c(\lambda^3+2\lambda)}{6}。$$

$$B=bc-9ad=\frac{\mu_c\left(\lambda^3+\lambda\right)}{4}-\frac{\mu_c^2\lambda^2}{2}-\frac{3}{48};$$

$$C=c^2-3bd=\mu_c^2\lambda^2+3\times\left(\frac{1}{4}+\frac{\mu_c\lambda}{2}\right)\times\left[\frac{1}{24}-\frac{\mu_c\left(\lambda^3+2\lambda\right)}{6}\right];$$

据总判别式 $\Delta=B^2-4AC$ 的大小，选用盛金公式 1 或 2 或 3 或 4 求解式（1-6）。得到解后，选取在区间[b/l,1]之间的解并在这里将之定义为 φ_1；$x=\varphi_1\cdot l$ 即为挠度最大的截面位置；将 φ_1 代入式（1-4），即得挠度最大截面处的挠度系数，进而得到立柱双跨梁在线性矩形荷载作用下的最大挠度。

6.求解双跨梁最大挠度实例

现以一工程实例演示利用盛金公式求解双跨梁最大挠度的过程。

立柱计算模型：双跨梁；

立柱总跨度：l=4500mm；

立柱短跨跨度：b=450mm；

立柱材质及截面：钢 Q235B 方管 100×50×4；

立柱弹性模量：E=206000N/mm2；

立柱型材受弯平面内惯性矩：I=1341240mm4；

水平荷载标准值：q=1.29kN/m；

则：λ=450/4500=0.1；

代入式：

$$\mu_C=-\frac{1}{\lambda(1-\lambda)^2}\left(\frac{\lambda^2}{4}-\frac{\lambda^3}{8}-\frac{1}{8}\right)$$

得：μc=1.5139。

λ、μc 已知，则可得式（1-6）中各个系数的值：

a=0.1667；b=-0.326；c=0.15139；d=-0.009；

进而可得判别式的各个参数的值：

A=0.0304；B=-0.036；C=0.014；

判别式Δ=-0.00043393<0，应采用盛金公式 4 求解。

得到 φ 的三个解分别为 0.0699、1.2753、0.60896。

区间[b/l,1]=[0.1,1]，仅 0.60896 在区间[0.1,1]之间，因此取 φ_1=0.60896。

将 φ_1 代入式（1-4）得 α=-0.004。

$$f_x=\alpha\frac{ql^4}{EI}=0.004\times\frac{1.29\times 4500^4}{206000\times 1341240}=-7.7mm$$

fx 的方向为 y 轴负方向。

采用钢结构设计软件 3D3SV11 建模进行计算。计算模型如下图图 3 所示。其中定义钢梁承受活载 1.29kN/m；

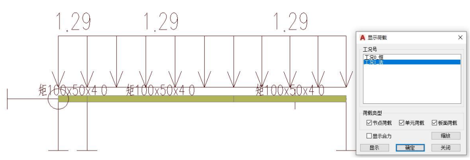

图 3 3D3S 计算模型

计算得到活载工况下的挠度如下图图 4 所示。

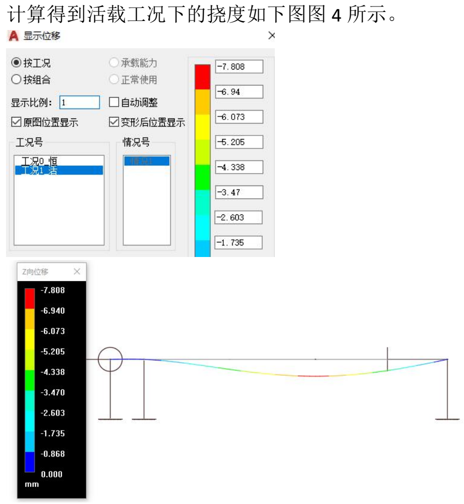

图 4 3D3S 挠度计算结果

用盛金公式求解得到的杆件最大挠度为 7.7mm,用钢结构设计软件 3D3S 计算得到的杆件最大挠度为 7.808mm，因钢结构设计软件 3D3S 只在有节点的位置才有计算结果输出,因设置节点的位置的精度问题，两种方法得到的挠度有微小的差别。

7.结论

本文采用盛金公式求解了不等跨双跨梁的最大挠度,并与钢结构设计软件 3D3S Design 2022 的计算结果进行对比。

在幕墙工程中,除了双跨梁外单跨悬挑梁也很常见。在求解单跨悬挑梁时,同样会遇到求解一元三次方程的情况，同样地可以采用盛金公式求解。

【参考文献】

[1] JGJ102—2003 玻璃幕墙工程技术规范[S].