

# 数学习题课——为提升思维而教

廖冬梅

(重庆师范大学教育科学学院, 重庆 400000)

摘要: 数学学科最大的教育功能是发展思维, 数学习题课的教学目标是提升所有学生的思维能力。为此教师可以从四个原则入手: 第一次法则、轻结果重思路、重视“解题失败”的经历以及科学设计题量和难度。

关键词: 数学习题课; 思维能力

学生必须做习题才能学好数学, 好比只在岸上听动作要领, 却不跳进水里去扑腾不可能学会游泳。每个孩子都必须通过做习题亲身体验无数次的茫然无措、上下求索、百思不解, 再百折不挠到豁然开朗这些过程, 方能在神经系统里搭建起新的突触系统从而提升思维能力。所以习题课在数学教育中占很大比重。但习题课的教学目的是什么呢? 是为巩固知识? 为在考试中拿高分? 还是为提升学生的思维能力呢?

## 一、习题课的教学目标是: 提升学生的思维能力

欧几里得、哈代、小平邦彦、陈省身都说过, 人类大脑具备理解数学的潜力, 而数学反过来可以极大促进大脑思维能力的发展。的确, 恐怕很难找到一门学科能像数学一样让大脑在符号世界里进行解读问题、简化问题、逻辑推导等思维能力的演练了。

中国、日本和美国的“义务教育阶段的数学教育标准”也都不约而同地强调数学教育应该致力于提高学生的思维能力。中国的课程标准把它具体化为: “四基”“四能”和核心素养; 美国的国家课程标准强调逻辑思维能力和解决问题的能力; 日本在其“文部省学校数学学习指导要领”中将“理解数学知识, 形成数学精神”作为数学教育的目标。既然数学教育的目标是提升思维, 作为数学教育重要组成部分的习题教学自然也不例外。

可是受“提高1分压倒千人”之类功利思想的影响, 本该为“爱智慧”而教的数学教育沦为考试的奴隶。在调查中笔者发现, “学数学就是做很多题”, “刷题多就能学好数学”这样的想法在中小学非常普遍。相反“学数学是为提高抽象和逻辑思维能力”这样的理念反而变成一句口号——虽然正确却无意义。很多学生在学习了12年的数学, 刷了无数难题后却对数学精神茫然无知, 对数学的学科框架一头雾水。数学之美被扭曲, 数学所蕴含的理性思维, 严谨的论证态度, 可以推广的方法, 以及追求真理的精神都被“刷题”“刷分”淹没。

美国的中小学数学教育也存在类似问题, 虽然“应试”的消极影响小一些, 但教师在上习题课时只讲套路不教思维的问题同样普遍。美国数学家保罗·洛克哈特在《一个数学家的叹息》书中, 华人数学家伍鸿熙的专著《数学家讲解小学数学》都对“中小学生的数学教育没有教给学生数学精神”进行了尖锐批评。保罗说: “本来应该很有意义的题目, 可以引导出各种没有边界的讨论, 感受到数学中的主题统一与和谐, 可我们却代之以无趣和重复的习题、特定题型的解题技巧, ……以至于学生和老师都无法清楚理解, 这些事情最初的样子或是为什么会发生。”伍鸿熙说: “产生数学恐惧症的原因可能是, 在你还没有充分准备好或理解的情况下, (教师)就多次要求你做数学题, 并且只要按照规定好的步骤去做即可, 之后就任由你自生自灭。”虽然批评的角度不同但实质却不谋而合: 数学教育中如果只让学生做题却忽视引导学生完全理解题目并思考题目背后的思维方法, 不仅背离了数学的本质,

也无益甚至阻碍学生的发展。

## 二、习题课的教学方法初探

### (一) 第一次法则

“第一次法则”指, 教师应该高度重视把新题第一次呈现给学生时的习题教学。新题一般包括两种类型: 与每个知识点配套的第一道难题或者一种全新的题型。首先要留给学生充足的时间去独立探索, 然后在讲解习题时要强调思路和产生该思路的原因, 并鼓励学生反思自己的思维过程。绝对不能直接讲解题步骤。

因为新题型(尤其是难题)不仅意味着挑战, 更是机会, 是学生强迫自己突破既有思维习惯的局限, 深入理解并培养在纷繁变量中归纳本质, 逻辑推导, 深度思考等高阶思维能力。此时如果教师为了追求“效率”直接把解题步骤讲给学生, 显然对绝大多数学生而言, 习题课就变成了背诵课。孩子都有很强大的学习能力, 所以他们可以记住老师教给他们的解题套路; 同时人类大脑有“偷懒”的本能, 所以当学生第二次或第三次遇到熟悉的题目时, 他们的大脑会自动调用已经储存的类似题型以最快解决问题。遗憾的是如此一来很多宝贵的思维能力失去被锻炼的机会, 如怎样找到本质, 怎样找切入点, 怎样逻辑推导等。

而且因为创造一道崭新的题型很不容易, 并没有那么多新题型让学生去挑战和重建自己的思维。所以教师也应该珍惜新题型, 每一种新题型都必须让学生自己去探索, 他们在每次挑战这些新题型中体验到的百思不得其解的痛苦和终于拨云见日的自豪感, 以及一点点建立起来的读懂题意、简化问题、逻辑推导和反复验证等思维方法, 都是数学学习能带给他们最重要的收获。

### (二) 轻结果重思路

在讲解难题时, 教师应向学生明确说出评价的新标准: “不是看谁的答案正确, 而看谁最能清楚地描述自己的思路, 包括刚看到题的心路历程、如何读懂题目? 如何简化问题? 如何推导? 卡在什么地方? 如果连题都没有读懂是为什么? 如果完全毫无头绪又是为什么?”等等非常具体的问题。当学生学会去提出这些问题后, 他们可以在做题的过程中, 从关注答案转变到关注自己的思维。然后教师应针对学生出现的不同问题给他们一些通往正确道路的提示, 好比给学生“搭一座桥”, 使他们能够自己走到解决问题的下个阶段。

当教师讲解自己的解题方案时, 不能直接把步骤抛给学生, 而应重点讲自己的思路, 如自己遇到的困难有哪些? 怎么想到突破口的? 怎么推导的? 在哪里卡住了? 如何重新开始的? 以及很多人容易遇到的问题有哪些? 应该如何解决? 等。正如数学家波利亚在《数学思维的新方法》一书中指出, 好的老师应不仅讲解题的步骤, 更应该讲这些步骤后面的动机和推理过程。如下题:

“把 $\frac{7}{22}$ 化为小数后, 小数点后面的50位各位上的数字之和是多少?”

5年级的学生如果从未见过类似题型，大多数的第一反应是不知从何入手。因为不知从何入手，所以他们普遍会要么坐等老师来讲，要么盯着题等待灵感。老师在讲这道题时有两个关键点：1.我是怎么找到切入点的？如“我首先想到，要把 $\frac{7}{22}$ 转化为小数，就是要用‘分数转小数’单元学到的方法，即用竖式除法计算 $7 \div 22$ 。但要求小数点后面50位数，直觉是绝不可能直接计算，那么该怎么办呢？我也不知道。可是目前又没有找到比竖式除法更好的方法了，所以我决定先用这个方法试一下，看能不能找到一些规律。”其实这道题如果作为一道新题型，它对学生最大的教育意义是：如果你没有想到很好的解决方案，就先用已知的方法去试，切忌原地不动。而且因为孩子的本能恰恰是原地不动，所以通过这样的练习，让他们亲身体会“即使前路不明仍要尝试”的神奇效果。另一方面学生还能对“用找规律的方法来简化问题”这样的思维方法产生更加深刻的认同。此时教师可以停下来，请学生自己做： $7 \div 22 = ?$

规律很快浮现，这是一个无限循环小数，即 $0.31\overline{8}$ 。但此时还是不能把后面的步骤直接讲给学生，而应该把这当作是给学生继续前行搭的一座桥，接下来的路让他们自己走。讲解这道题的第二个关键点是：询问学生他们是如何走接下来的路？如怎样利用18循环节？怎样定位到小数点后第50位数是几？怎样利用这些来计算所有小数点后50位数字的相加之和？他们遇到什么问题？怎么解决这些问题？在真实的课堂上，因为循环节是从小数点后第二位才开始，所以“找不到或找错了第50位数是几”的孩子大有人在。老师恐怕觉得简单，但其中蕴含的思维能力还真的一点也不简单。

首先要有简化问题的思维，如找到解决问题的核心就是找到位数和循环节的关系；然后继续简化问题：因为小数点后的第一位数3使我们的计算变得复杂，所以可暂时“排除它”，即如果小数是：0.18，计算第50位是否就变得很简单了。等找到这样的规律后，最后再把3加回去，就能得到正确答案220。当然方法不止这一种。但无论用哪种方法，学生必须思路清晰、步骤严谨，并能够总结出思路和解题的推进过程，才算通过做题提升了思维能力。相反如果仅仅得到正确答案，却没有关注思路，还真就浪费了一道好题。

### （三）重视“解题失败”的经历

探索是人类一个非常重要的能力，而探索的结果如果成功固然令人欣喜，但失败的经历却不仅不可避免，而且“如何利用失败”更成为低阶和高阶思维能力的分水岭。具备高阶思维能力的人不会用怨天尤人或破罐破摔来对待失败，而会审慎地检查过程，找到出错的地方，甚至还会反思自己思维方法上出错的原因等。对比数学习题的解题过程不难发现，这两种情况非常相似。如果学生解题失败或错误，他们最需要做的是原路返回去检查，找到出错的地方，改正错误或思考新的解题思路。最后还要反思自己的思维过程，找到自己思维上的“短板”，或者学习一种新的思维方法。所以，重视“解题失败”的经历并非为了让学生将来更准确地做题，而是为了发展他们的思维能力。

学生在第一次遇到“好题+难题”时的思维历程非常丰富，如，茫然和想要放弃然后咬牙尝试，到失败，到继续尝试，到卡在一个地方找不到出路而苦思冥想等等。所有这些恰是他们原有的思维能力被挑战，然后不得不被调适，去寻找新方法的时候，他们此时经历的痛苦正是提升思维能力的必经之路。如下面这道题，

题目很简单，如果不让学生走弯路，老师直接把解题步骤教给学生即可，学生都能记下来，以后遇到类似题目也都知道套用方法。但这种题型的首创者对此一定痛心不已！因为当初设计这样的题目是为了让学生对“比”这个非常抽象的数学概念进行更深入的思考和获得更透彻的理解。

“已知： $\frac{1}{3}a = \frac{1}{4}b = \frac{1}{5}c$ ，且 $abc \neq 0$ ，那么， $c:b:a = ?$ ”

最怕听到学生说：“这么简单，我早就会做了！”如果学生觉得简单，说明他第一次遇到这种题型时没有经历挫折，其原因不是所谓“天赋高”，而是缺少深度思考。如他学过 $a:b=a \div b$ ；和若 $a:b=c:d$ ，则 $bc=ad$ ，为什么会有这样的等价关系呢？这两个公式如何运用到这道题目中？虽然 $a:b=a \div b = \frac{a}{b}$ ，但是 $c:b:a = ?$ 这道题有几种解法呢？哪种最简洁呢？为什么要有 $abc \neq 0$ 这个条件呢？如果学生独立解题，这些都是他会遇到的困难，他也许会被卡在某个地方，又或许会在某一个或几个步骤出错，但如果利用好这些“挫折”学生便可以发现自己对“比”和相关公式理解不够深刻或者偏差的地方，甚至还可以反思自己当初的“以为已经完全懂了”和“真的懂了”之间的差距，然后慢慢从停留在表面的学习状态向深度学习转化。

### （四）科学设计题量和难度

数学题一定不是做得越多越好，题也不是越难越好。有些难题能够比较全面地训练学生的思维，如从正确而全面地解读问题、简化问题、逻辑推导，到反复探究、验证和反思的思维能力；有些难题则能集中锻炼学生某一方面的思维能力，这些都是好题。但有些题目虽然难，却难在需要运用某些特殊技巧，而这些技巧也仅限于在此题目的特殊情况下有效，根本不能推广，这些题就是浪费学生时间和精力“坏题”。在数学题的数量方面也如此。在当今这个知识爆炸和快速更新的时代，学生要读的好书，要学习的知识以及要亲自去参加的体育、艺术或各种社会活动都太多，所以他们的时间和精力都应该被合理规划，用到最有意义的地方。给学生的练习题应该被精心设计和挑选，尽量避免无意义的重复。所谓“读书（或刷题）百遍其意自现”在现代社会和数学学科都不适用。

最后引用保罗在《一个数学家的叹息》书中的一句话：“数学是一门艺术，是从事发现与猜测、直觉与灵感的活动。”相应地数学的习题课应该是教师和学生一起探险的过程，习题课的教学目标不是高分，而是提升学生的思维能力。

### 参考文献：

- [1] (美) 保罗·洛克哈特(Paul Lockhart). 一个数学家的叹息[M]. 上海: 上海社会科学出版社, 2021.
- [2] (美) 伍鸿熙. 数学家讲解小学数学[M]. 北京: 北京大学出版社, 2021.
- [3] (日) 小平邦彦. 几何世界的邀请[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2021.
- [4] 《一课一练》编写组. 《华东师大版一课一练》(1-9年级)[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2020.

作者简介：廖冬梅（1974-），女，汉族，重庆人，博士，副教授，硕士研究生导师。工作单位：重庆师范大学教育科学学院。2006年美国佛罗里达大学访问学者，研究方向：数学教育、英语教育、家庭教育。