

# 基于 KdV 方程的 Gauss 包络形态畸形波数值演化规律研究

罗春莲

(厦门海洋职业技术学院航海学院, 福建 厦门 361012)

摘要: 本文研究了高斯包括形态畸形波在浅水深处的生成和演化规律。首先验证浅水波 KdV 方程数值求解的正确性; 其次, 研究 Gauss 包络形态畸形波在浅水波 KdV 方程中的演化规律; 最后, 采用 CWT 变换揭示畸形波演化过程中的能频特征。研究表明: Gauss 包络形态畸形波在浅水波 KdV 方程中具有碰撞稳定的性能; 伴随 Gauss 包络畸形波的生成, 能量聚集, 聚集处的频率宽度增大; 随 Gauss 包络畸形波的消失, 能量消散, 聚集处的频率宽度减小。

关键词: 畸形波; KdV 方程; 数值模拟; Gauss 包络

畸形波 (rogue wave) 是一种大波高、非线性特征明显、持续时间较短和发生时伴随着巨大的能量的波浪。畸形波遍布各大海域, 当其发生在近岸浅水区时, 将严重威胁人民的生产生活和生命安全。

目前, 畸形波的实测数据较少, 理论分析多基于一定的假定, 因此, 研究人员常基于非线性波浪理论, 数值模拟出符合畸形波特征的波浪。目前, 浅水畸形波的数值模拟研究主要基于 KdV 方程。然而, KdV 方程皆为非线性偏微分方程, 对于非线性偏微分方程无通用的求解方法。本文选取 KdV 方程为浅水畸形波模拟模型, 选取有限差分法求解该方程。同时, 结合 CWT 变换研究高斯包络形态畸形波在 KdV 方程框架下的时历和能量演化规律。

## 一、KdV 方程

KdV 方程的推导过程如下。

连续性方程

$$\beta\phi_{xx} + \phi_{zz} = 0 \quad (1)$$

动力学边界方程

$$\eta + \phi_t + \frac{1}{2}\alpha\phi_x^2 + \frac{1}{2}\beta\phi_z^2 = 0 \quad (2)$$

运动学边界方程

$$\eta_t + \alpha\phi_x\eta_x - \frac{1}{\beta}\phi_z = 0 \quad (3)$$

水底方程

$$\phi_{zz} = 0 \quad (4)$$

式中,  $\phi$  为速度势,  $x$  为波浪的传播方向,  $z$  为垂直坐标,  $t$  为时间,  $\alpha = \frac{d}{h_0}$ ,  $\beta = \frac{h_0^2}{l^2}$ ,  $h_0$  为波浪的基准高度,  $d$  为波幅,

$l$  表示波长,  $\eta$  为液面高度。

在 ( $\beta = \frac{h_0^2}{l^2} \ll 1$ ) 和 ( $\alpha = \frac{d}{h_0} \ll 1$ ) 的条件下, 求出方程 (2)、

(3) 和 (4) 时, 方程 (1) 的解。

通解可表示为

$$\phi = \sum_0^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(2m)!} \frac{\partial^{2m} f}{\partial x^{2m}} \beta^m z^{2m} \quad (5)$$

其中,  $f$  是关于  $x$  和  $t$  的函数。

将式 (5) 代入方程 (2) 和 (3), 分别可得

$$\eta_t + [(1 + \alpha\eta)f_x]_x - \left[ \frac{1}{6}(1 + \alpha\eta^3)f_{xxxx} + \frac{1}{2}\alpha(1 + \alpha\eta)^2 f_{xxx}\eta_x \right] \beta + O(\beta^2) = 0 \quad (6)$$

$$\eta + f_t + \frac{1}{2}\alpha f_x^2 - \frac{1}{2}(1 + \alpha\eta)^2 (f_{xxx} + \alpha f_x f_{xxx} - \alpha f_{xx}^2) \beta + O(\beta^2) = 0 \quad (7)$$

在  $\alpha = \frac{d}{h_0} \ll 1$  和  $\beta = \frac{h_0^2}{l^2} \ll 1$  的条件下, 式 (6) 和式 (7) 中

的  $\alpha\beta$  和  $\beta^2$  约为 0, 同时令  $F=f_x$ , 则方程 (6)、(7) 分别变为

$$\eta_t + [(1 + \alpha\eta)F]_x - \frac{1}{6}\beta F_{xxx} = 0 \quad (8)$$

$$F_t + \alpha FF_x + \eta_x - \frac{\beta}{2} F_{xxx} = 0 \quad (9)$$

令

$$F = \eta - \frac{1}{4}\alpha\eta^2 + \frac{\beta}{3}\eta_{xx} \quad (10)$$

(8) 和 (9) 化为一个方程

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x + \frac{1}{6}\beta\eta_{xxx} = 0 \quad (11)$$

将以下变换

$$t' = \left(\frac{6}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} t, x' = \left(\frac{6}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} x, \eta' = -\frac{1}{4}\left(\alpha\eta + \frac{2}{3}\right) \quad (12)$$

代入式 (11), 化简出 KdV 方程

$$\eta_t + 6\eta\eta_x + \eta_{xxx} = 0 \quad (13)$$

## 二、KdV 方程的数值计算方法及验证

对如式 (15) 所示的方程, 有以下形式的解:

$$\eta(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct - x_0) \right] \quad (14)$$

其中,  $c$  为波的传播速度,  $x_0$  为波的初始位置。

设孤立波解的初始值  $c=4$ ,  $x_0=0$ , 即:

$$\eta(x, 0) = 2 \operatorname{sech}^2(x) \quad (15)$$

采用有限差分法数值求解方程, 差分格式为:

$$\eta_t = \frac{\eta_1 + \eta_{-1}}{2\Delta t} \quad (16)$$

$$\eta_x = \frac{\eta_1 + \eta_{-1}}{2\Delta x} \quad (17)$$

$$\eta_{xxx} = \frac{\eta_2 - 2\eta_1 + 2\eta_{-1} - \eta_{-2}}{2\Delta x^3} \quad (18)$$

其运行结果如图 1 所示。

在图 1 中, 孤立波在  $t=0$ 、 $t=3$ 、 $t=9$  等不同时刻下畸形波的数值解与理论解皆符合良好, 表明本文在选取有限差分法求解 KdV 方程过程中具有较高的准确度。

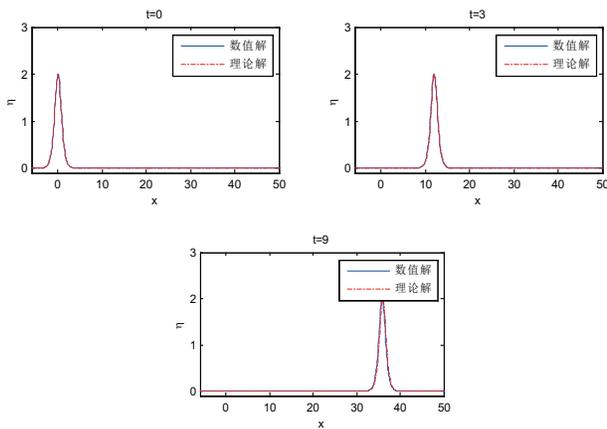


图 1 孤立波解的演化过程

### 三、基于 Gauss 包络形态畸形波的演化研究

设高斯包络形态畸形波生成时的解为：

$$\eta_{Gauss} = \text{Re}\{A_0 \exp[-(x-x_0)^2/4\sigma^2 + ik_0(x-x_0)]\} \quad (19)$$

其中,  $x_0$  为波聚焦位置,  $k_0$  为波数,  $s$  为能量集中度,  $A_0$  为高斯包络的幅值。

设置畸形波生成时刻的形式为：

$$\eta_{Gauss} = \text{Re}\left\{\begin{matrix} \exp[-(x-10)^2/16-2i(x-10)] + \\ \exp[-(x+10)^2/16-4i(x+10)] \end{matrix}\right\} \quad (20)$$

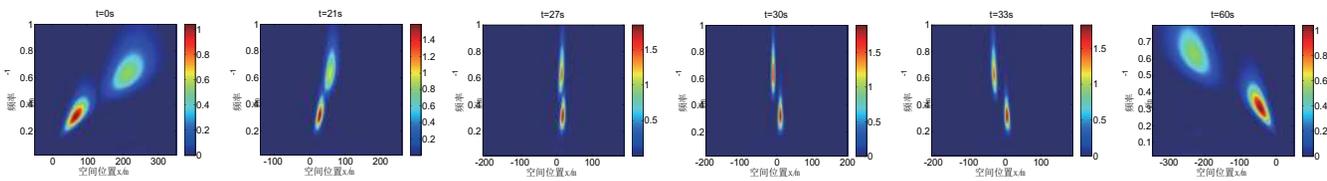


图 2 双 Gauss 包络形态畸形波的演化过程

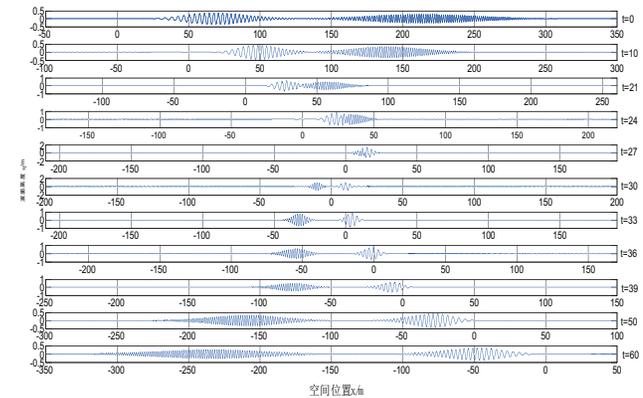


图 2 双 Gauss 包络形态畸形波的演化过程

进一步采用小波变换 (式 (21) 和式 (22)) 对图 2 中的波浪曲线进行能量和频率分析。

$$(Gf)(b, w) = \int f(\theta) g^*(\theta - b) e^{-i\omega\theta} d\theta \quad (21)$$

$$g(\theta) = 1/\sqrt{4\pi\alpha_0} \cdot \exp(-\theta^2/4\alpha_0) \quad (22)$$

其中,  $w$  为频率,  $a_0$  为常数, \* 表示共轭复数,  $g(\theta)$  为窗函数,  $f(\theta)$  为信号函数。

图 3 Gauss 包络形态畸形波的空间频率能量谱

Gauss 包络形态畸形波在演化过程中, 在波浪的聚焦时刻, 即畸形波出现时刻 ( $t=30s$ ), 能量聚集度增大, 聚集处的频率宽度增大, 畸形波消失时 ( $t=33s$  到  $t=60s$ ), 能量聚集度减小, 聚集处的频率宽度减小。

### 四、结语

本文研究表明: Gauss 包络形态畸形波在浅水波 KdV 方程中具有碰撞稳定的性能; 伴随 Gauss 包络畸形波的生成, 能量聚集, 聚集处的频率宽度增大; 随 Gauss 包络畸形波的消失, 能量消散, 聚集处的频率宽度减小。

### 参考文献:

[1]Mori N, Yasuda T, Nakayama S.Statistical properties of freak waves observed in the Sea of Japan [C].International Society of Offshore and Polar Engineers, 2000.

[2]Sand S E, Ottesen N E, Klitting P, et al.Water wave kinematics[M].Molde, Norway, Kluwer, 1990.

[3]崔成, 张宁川, 裴玉国.畸形波生成、演化过程研究: 波面时间过程随位置的变化 [J].海洋通报, 2011, 30 (4): 87-396.

[4]李金宣, 张亚荣, 柳淑学, 王磊.基于双波群聚焦机制的畸形波生成机理分析 [J].水动力学研究与进展 (A 辑), 2020, 35 (04): 497-504.

[5]盖立涛.几类非线性可积偏微分方程的解析解方法研究 [D].大连理工大学, 2021.

[6]高森林, 扈喆, 张晓莹, 马亚州, 毛富丰.基于 KdV 方程的浅水畸形波演化特征 [J].集美大学学报 (自然科学版), 2020, 25 (03): 214-221.

[7]欧阳凤蛟.非等谱 KP 方程和变系数 KdV 方程的周期解 [D].华东理工大学, 2012.

[8]崔成, 张宁川.基于非线性模型的畸形波模拟及其时频能量谱研究 (英文) [J].Marine Science Bulletin, 2011, 13 (01): 25-39.

[9]黄景宁, 徐济仲, 熊吟涛.孤子: 概念、原理和应用 [M].高等教育出版社, 2004: 52-56.

[10]李瑞翔, 包立平, 吴立群.一类奇摄动 Kdv-Burgers 方程与孤波解 [J].杭州电子科技大学学报 (自然科学版), 2020, 40 (04): 87-90.

[11]余向军.浅水畸形波成因分析及其数值模拟 [A] 中国航海学会海洋船舶驾驶专业委员会.气象海洋环境与船舶航行安全论文集 [C].中国航海学会海洋船舶驾驶专业委员会, 2010: 4.

基金项目: 本文系 2020 年福建省教育厅中青年骨干教师教育科研项目科技类 (项目编号: JAT201163) 的研究成果。

作者简介: 罗春莲 (1991—), 女, 福建龙岩人, 硕士研究生, 助理实验师。研究方向: 畸形波数值模拟研究。