函数与极限教学中的反例探讨

张 平 周杜娟
（北京理工大学珠海学院，广东 珠海 519088）

摘要：本文采用举反例形式对函数极限中的有界性、连续性、无穷小等概念进行了辨析，以此加深同学们对这些概念的理解与领悟，从而使同学们更好地掌握函数与极限的基本概念及内涵。

关键词：反例；有界性；连续性；无穷小

微积分自诞生之日起，就经历了诸多磨难，出现了第二次数学危机——关于无穷小的认识。许多大学生对于微积分的概念总是模棱两可、一知半解的，而微积分中的很多概念定理高度抽象难以理解，也很少有实际模型可套用。一些命题很难从正面去理解其内涵，这就需要用反例加以解释说明。因此，在教学中举一个恰当的反例往往会事半功倍，一语道破玄机，使同学们豁然开朗。

本文利用反例对函数极限中的相关概念进行了辨析，使同学们能有效地把握这些概念的内涵和外延，从而提高学习效率。

一、有关函数性态的命题

命题 1. 周期函数之和（积）未必是周期函数。反例：$f(x)=\cos 2x, g(x)=\cos(\pi x)$，则 $f(x)+g(x), f(x)g(x)$ 都不是周期函数。因为一个周期是 2，一个周期是 π，不存在最小公倍数，从而 $f(x)+g(x), f(x)g(x)$ 都不是周期函数。

命题 2. 周期函数未必有最小正周期。反例：狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$，它以任意有理数 q 为周期，从而没有最小正周期。因为 $x\in Q$时 $D(x+q)=1=D(x)$；

$x\in Q^C$时 $D(x+q)=0=D(x)$，从而 q 是 D（x）的周期，但不存在最小的有理数，所以没有最小正周期。

命题 3. 无界函数的和差积商未必无界。反例 1）：$f(x)=-\dfrac{1}{x}, g(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内均无界，但 $f(x)+g(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内有界；反例 2）：$f(x)=\tan x, g(x)=\cot x$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内均无界，但 $f(x)\cdot g(x)=1$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内有界；反例 3）：$f(x)=\dfrac{1}{x}, g(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 在 $(0,1)$ 内均无界，但 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=x$ 在 $(0,1)$ 内有界。

目前高等教育正由大众化转向精英化发展，国家对于高端技术人才和创新型人才的渴望也越来越迫切，而创新思维和创新能力的培养，更离不开数学教育者的助力。在数学教学中适时地加入反例，能有效激发学生的创造性和想象力，使其开动脑筋，展开想象的翅膀，多角度全方位地思考问题，勇于提出新问题，发现新思路，真正做到举一反三。例如，增减定理的某些条件会得到什么不一样的结论，举例说明定理不成立的反例。这使得学生在构造反例的思维训练中学会创新，培养勇于探索，开拓进取的良好学习习惯，达到提升学生创新思维能力的目的。

下面我们探讨一个“关于单调有界定理”的考研题所引出的反例思考。

命题 4. $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题是否正确？

（1）若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛；（2）若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛；

（3）若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛；（4）若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛 .

分析：正确的命题是（2）；因为 $\{x_n\}$ 单调，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调，所以 $f(x_n)$ 也单调且有界，由单调有界定理知 $\{f(x_n)\}$ 收敛。

（1）的反例：$x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$，$f(x)=\begin{cases}\arctan x+1, & x\ge 0\\ \arctan x-1, & x<0\end{cases}$

（3）和（4）的反例：$x_n=n$，$f(x)=\arctan x$，$f(x_n)=\arctan n\to\dfrac{\pi}{2}(n\to\infty)$

上述四个命题考察了周期函数的概念辨析和单调有界定理的内涵，通过反例的深入剖析，有效地提升了同学们对这些概念的理解程度，从而为后续课程的学习做好铺垫。

二、有关函数极限与连续的命题

高等数学的发展史是十分曲折而漫长的，作为一名高校数学教师，如何用最直观、最通俗的方法来对数学概念和定理抽丝剥茧，让学生感受到数学的美和魅力所在，这是十分考研教师的基本功的一个课题。只有学生真正体会了数学的思想精髓，感悟到数学的语言美，才能培养出学生的数学素养，使其主动地融于数学的学习之中。

通过不断地教学探索和研究，我逐渐认识到在微积分教学中科学地融于数学发展历史，有利于同学们构建良性的知识图谱，而针对复杂概念进行反例构造则是一个不可忽略的教学手段。例如，极限运算中的概念辨析，同学们借助一个反例就能轻松理解了。

命题 5. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 x_0 的去心邻域内有界；反之不然。反例：

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & x=0\\ -1, & -1<x<0\end{cases}$$ 在 $|x|<1$ 内有界，但 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在。

命题 6. 无限多个无穷小之和不一定是无穷小。反例：

$$\lim_{n\to\infty}(\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n个})=1$$

这里告诉我们，在无限的世界里，四则运算法则不一定成立。

命题 7. 无穷大一定是无界的，但无界不一定是无穷大。反例：$y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 内无界，但当 $x\to 0^+$ 时它不是无穷大。

无界函数由于可能出现震荡间断点，所以它不一定是无穷大。这个例子很好地给出了两者之间的区别与联系。

命题 8. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$ 不存在。反例：

$$f(x)=x,g(x)=\sin\frac{1}{x},\lim_{x\to 0}[f(x)\cdot g(x)]=0$$

上述两个命题是典型的考察极限四则运算法则的反例，不能想当然地认为两个不存在的极限相乘也一定不存在。微积分是牛顿和莱布尼兹创立的，经过柯西、魏尔斯特拉斯等数学家的完善，便进入了具有严密理论基础的新阶段。在这一阶段，各种反例的涌现对微积分概念的精确化，逻辑推理的严格化起到了举足轻重的促进作用。这些反例极大地推动了数学的发展，打开了数学研究的新篇章。数列极限中就有许多值得思考的伪命题，例如以下的命题就需要反例来加以诠释。

命题 9. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|A|$；反之不然。反例：$x_n=(-1)^n$

这个反例表明数列有界是数列收敛的必要条件，而不是充分条件。

命题 10. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$。数列极限存在可以推出函数极限存在，但反之不然。反例：$\lim\limits_{n\to\infty}\arctan n=\frac{\pi}{2}$，但 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在。

反例教学的重要性不言而喻，它可以帮助同学们避开命题陷阱，引导同学们清晰理解所学概念定理，也促使同学们养成勇于探索的品质，敢于质疑教材、敢于质疑老师、敢于质疑权威；让学生在课堂中大胆猜测、大胆试错，然后总结原理方法，从而产生师生共鸣，把深奥难懂的数学命题分析得透彻心扉，从而真正实现教学相长。通过这种训练，也使同学们坚定了学好数学的决心和毅力，培养学生不畏艰难、勇往直前的拼搏精神。

教师在反例教学中也要学会把握尺度，必须符合大学生的心理特征和接受能力，尽量选择浅显易懂的反例。如何设置最佳的反例，是十分考验教师的教学水平的。反例的好坏直接影响学生对相关概念的理解和掌握。在学生获得正确理解之前，教师应当适时点拨，帮助学生分析出现错误的原因，培养学生严密的逻辑推理，促使其理清知识点的来龙去脉。

高等数学是集高度严密性和内在统一性于一体的公共基础课程，每一位教师都应该思考如何教才能让学生听懂。而反例便是一个很好的教学方式，它把抽象的数学理论转化成为具体的实际例子，使学生更容易接受。但是，构造反例需要一定的数学功底，学生在构造反例的过程中，能够发现自己的知识储备是否充足，在今后的学习中就会注意积累知识，端正态度，养成良好的学习习惯。教师作为课堂教学的主导者，在课堂主阵地中要发挥引领作用，要经常关注并收集学生所犯的错误点，并把这些易错点转化成反例，有针对性地为学生讲解，以此来提高课堂的教学质量。例如，下面关于连续与间断的命题中，学生就如何界定复合函数的连续性。

命题 11. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续且 $f(a)\neq 0$，$g(x)$ 在 $x=a$ 处间断，下列结论是否正确？

（1）$g[f(x)]$ 在 $x=a$ 处间断；（2）$f[g(x)]$ 在 $x=a$ 处间断；
（3）$g^2(x)$ 在 $x=a$ 处间断；（4）$\frac{g(x)}{f(x)}$ 在 $x=a$ 处间断 .

解：正确的命题是（4）； 而（1），（2），（3）的反例：$f(x)=1$ 在 $x=0$ 处连续且 $f(0)\neq 0$，$g(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处间断，但 $g[f(x)]=1,f[g(x)]=1,g^2(x)=1$ 在 $x=0$ 连续。

通过对上述命题的反例 [5-8] 分析，我们能更全面更清晰地理解有关函数极限的概念，从而有效地帮助学生突破极限理论的重难点，培养良好的数学思维能力。因此，反例的构建是大学数学教学的重要手段，它可以培养学生的创造性和发散性思维。教师精心设计案例和反例探究，能有效激发学生的学习兴趣，恰当地运用反例，能使你的教学取到意想不到的效果。

各高校都在积极探索高等教育的改革和特色教育模式，如何有效地提升教学质量和改革教学模式，以提高学生的综合能力及数学素质，这是许多一线大学老师必须面临的研究课题。而反例的恰当运用，能加强大学生对高等数学基本概念、基本定理的理解，打破传统的惯性思维定势，这对提升教学质量是大有裨益的。

参考文献：

[1] 杨奇，毛云英 . 微积分及其应用（第 8 版）[M]. 北京：机械工业出版社，2006.

[2] 刘红卫，于力 . 高等数学研究 [J]. 高等数学研究编辑部，2002.

[3] 同济大学数学系 . 高等数学 [M]. 北京：高等教育出版社，2007.

[4] 汤家凤 . 接力题典 1800[M]. 北京：中国原子能出版社，2016.

[5] 邹翠 . 探究大学课堂中函数极限运算法则教学 [J]. 读与写：上旬，2020（2）：1.

[6] 方倩珊 . 高等数学教学中的反例 [J]. 高等数学研究，2012（15）：2.

[7] 晏素珍 . 反例在微积分教学中的作用 [J]. 甘肃联合大学学报，2013（27）：6.

[8] 殷炜栋 . 微积分教学中的反例 [J]. 浙江科技学院学报，2014（26）：3.