

# 数学复习如何引导学生归纳与总结

罗槐珍 聂钱树

(杭州市临安区职业教育中心, 浙江 杭州 311300)

摘要: 数学复习通常都是知识的梳理和各类题型的练习与讲解为主线。以往的教师和学生都信奉: 只要多做习题, 总能练出个见题有感觉, 总能够见招拆招效果……多做练习总会有收获的思想是根深蒂固的。不怕题目的多变也不怕各类考试的信心基本都来源于此。这样的想法是没有错的, 毕竟熟能生巧, 但是只是一味的题海战术, 没有及时的归纳、总结和反思。那么效果一定会大打折扣。现实中很多学生, 学了这章节, 忘了那知识的重要原因就是缺少及时的归纳、总结和反思。所谓学而不思则罔。学习过的知识是需要反思和总结的。反思自己哪块知识点没有学好, 反省自己的学习方法是否需要调整和改善。这就需要教师和学生一起重视归纳、总结和反思。

关键词: 总结; 归纳; 反思

高中数学知识点, 说浩若烟海可能有点夸张, 但是知识的多与杂且纵横交错, 不断形成新结构和层次更加难的知识体系这是事实。学生有时看了题都有望而生畏的感觉, 这是普遍存在的, 因为题目中每个已知条件和相关的知识点都很熟悉, 但放到具体题目中却有无从下手的感觉。所以及时的对知识点的整理, 题型的归纳、总结与反思是非常有必要的。对于整个知识体系的重新认识、全面系统理解和各种题型结构的把握度都有相当大的帮助, 可以做到事半功倍的效果。

归纳、总结和反思的具体内容:

1、自己解题是否存在错误: 包括知识点应用的错误、基础知识掌握是否扎实是否有混淆知识点的错误、解题过程步骤是否有错和逻辑是否有混乱不清楚的地方等等。比如两个函数的公切线很多情况下是有两条的, 而解题时只求了一条。

2、对于同一题型, 是否有做过会遗忘的情形、是否有考虑从不同的角度的切入、进而从不同的角度, 用不同的方法解决同一问题、本可以用简单的方法, 是否有舍易求繁的情况发生。比如, 双根式求最值, 一般可以用向量法、换元、三角换元或者柯西不等式等方法来解决都是比较直观易求的。而如果采用两边平方那基本上是不得要领的体现, 很可能会增加计算量而且还容易做错。

3、及时归纳和总结题目中的二级结论, 对今后的学习有很大的助力和引导作用。有的题目本身不难, 但是题目中涉及的二级结论却对今后的学习和提升非常重要, 可以帮助分析题型结构, 也可减少计算和自我检查。比如, 圆锥曲线中有非常多的常用二级结构。例如椭圆中, 椭圆上的P点和椭圆上关于原点对称的两点的A、B连线, 可以得到  $OP \perp AB$ , 有了这样的结论在心中, 碰到类似题目, 就可以自我检查是否有错误或者可以减少计算量, 从而能更好的、全面的和系统的理解该题型的考点和实质。

4、总结题目能否有平时题型的拓展和引申, 改变题目的哪些条件, 会导出哪些新的结论; 保留题中的条件, 结论是否能进一步延伸拓展, 是否还有其他结论可以得出, 得出的结论是否具有普遍性等等。如: 在上述3中讲到的  $OP \perp AB$ , 其实椭圆中还有很多种情形也是同样的这个结论, 但是同样的前提条件到了双曲线中结论则变为  $OP \parallel AB$ , 这些都是需要花时间来归纳和总结的。

5、总结同类型题目及变式题目的解题方法和应注意的地方。不可以看到同类型的题目就机械地认为一定是某种确定的方法来解, 这样就很容易掉到出题者的陷阱里去。比如很多导数求参问题, 我们常用的是分离参数的方法, 也是很多学生能够最先想到的方法, 但是有时候分离参数是做不了的, 而且分离参数也是不容易实现的, 甚至是不可能的。此时我们就要总结, 该类题型求参数有哪些方法, 而且对于这些方法都要有相应的题目的训练和训练后的总结。

教师如何引导学生进行知识点及题型的归纳与总结, 笔者从三方面进行剖析, 考虑不周, 若能引发数学教学工作者的思考, 能起到抛砖引玉的作用, 笔者甚是欣慰。

一、横纵向知识点的互为转化的整理归纳与总结。

公式多且繁杂是三角函数这一块知识点的主要特点。部分学生对于三角函数知识点的理解与相关公式的记忆非常凌乱, 应用起来经常张冠李戴, 不知所措。那么如何归纳与总结才能避免学生混淆公式, 用错公式的方法措施。笔者想从横纵向知识点的整理互为转化为切入点进行整理。

比如: 通常对于某个系列的诱导公式是三个函数名一起出现, 如:

$$(1) \sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha \quad \cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha \quad \tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha$$

$$(2) \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \quad \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$(3) \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha \quad \tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

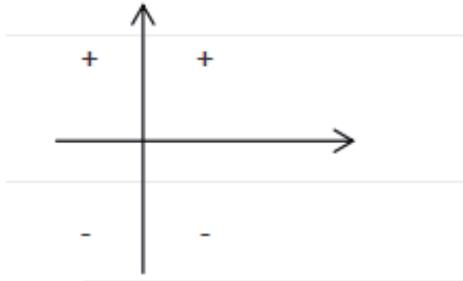
$$(4) \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha \quad \tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$(5) \sin(+\alpha) = \sin \alpha \quad \cos(+\alpha) = \cos \alpha \quad \tan(+\alpha) = \tan \alpha$$

这五组是常用的三角函数的诱导公式, 一般的记忆方法, 是参照各三角函数在各象限的正负, 然后用口诀“奇变偶不变符号看象限”来记忆和理解。当然第三组也可用函数的奇偶性来记忆, 第四组也可用直角三角形中两个互余角的正弦弦与正余切的关系

来记忆等等，很多学生都能理解的记忆而且灵活的应用，但是现实中还有部分学生会记忆混乱不清，这就需要我们教师在完成这一章节的知识后引导学生进行归纳和总结。

Sin 相关的公式安排在一起，便于整理、归纳和总结。具体如下图：



图一 奇变偶不变符号看象限

此时把所有 sin 常用的诱导公式写出来：

$$\sin(\alpha + \pi) = -\cos \alpha \quad \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = \cos \alpha \quad \sin(+\alpha) = \cos \alpha$$

显然都是一些基本的公式，但却是一种全新的展现。即把所有正弦相关的诱导公式都写下来，然后对照这个图，或者再用口诀。纵向的把正弦相关的诱导公式加以理解和记忆。不受其他三角函数公式的影响。如果这样的效果好，那么其他两个三角函数也可以用同样的方法加以整理和归纳。当然之前如果已经用一般方法，已经能够熟练掌握和记忆的可以舍去这种方法。

又比如：在立体几何中，旋转体和多面体中有很多的公式需要记忆，按照教材的顺序下来，大部分学生可能都已经烂熟于心，但在复习课上也可以把横纵向对着来归纳和总结，这样既可以帮助已经掌握学生有一种新鲜感，以便于更好地掌握达到温故知新的效果，还可以引导公式记忆不太扎实的学生重新记忆、理解和再强化。

## 二、课堂上同类型题的总结与反思

课堂上教师讲解某个题型的母题，然后把课前预先准备好的相对应的衍生题目进行练习（2至3题即可），做完好，让学生在练习卷的空白处，自行归纳与总结。总结的内容包括：涉及到哪些知识点，用到了什么公式和定理，属于什么类型，需要注意什么，有哪些易错点，大题的每个步骤和结论的得出，都要有相应的说明（相当于学生自己给自己点评）等等。对于掌握不熟练的需要重复做题，并进行相应的归纳和总结。比如：

母题：函数  $f(x-3) = 3x+1$  的定义域为  $(1, 8)$  求  $f(x)$  的定义域

解法一：由题意得  $1 < x < 8$ ，则  $-2 < x-3 < 5$  所以  $f(x)$  的定义域为  $(-2, 5)$ 。

学生练习衍生题：

1、已知  $f(x) = 2x-1$  的定义域为  $(-1, 5)$  求  $f(x-1)$  的定义域

2、已知  $f(x+1) = x^2+4x+3$  的定义域为  $(-5, 7)$ ，求  $f(x)$  的定义域和  $f(x)$  的表达式。

本题虽然母题和衍生题稍有差异，但用到的知识点却是同一体系的。既求函数的定义域应注意的：无论这个表达式多么复杂，求定义域就是求  $x$  的范围，同一个对应法下  $f$  对括号里的取值范围是一致的。再复杂函数求解析式都是同一个  $f$  的作用，同样的  $f$  就是对应法则是一样的。解该题的思路，一般有两种：一种是换元，把复杂的自变量换成简单的，然后通过计算转化求出  $f(x)$ ；第二种就是把  $f$  后面的一大堆看成整体，用配凑的方法，在式子中也体现这个整体代数结构来表示，最后用  $x$  去代替那个一大堆整体的东西，最后求解出  $f(x)$ 。

## 三、重要结论的归纳和总结

高中数学学习中，很多非常重要的结论是需要归纳和总结的，可以说这一步是学好高中数学的重要一环，也是争取高分必须要做的一个功课之一。很多结论我们做题时经常会隐隐约约会出现，需要我们用这些结论去套用，然后我们知道这些结论是对的，但又不能直接使用，所以对这一部分的归纳和总结就显得相当重要。

比如，求证  $xe$  这个题目左边是超越的函数，不太好处理，如果用求导分析当然是能够做的，但并不是很好分析和判断的，特别是基础不太好的学生，有时有些类似题目可能还要二次求导，无形中也可能给自己带来了计算量和分析难度。但如果掌握一点重要结论，那么此题一看就是指对同时出现的情形，通常是考虑同构或用切线放缩不等式，解题分析如下：

$$\text{分析：} xe \geq 2+inx \longleftrightarrow e^{inx} \geq 1+inx \longleftrightarrow e^x \geq x+1$$

而这个结论是我们经常用到的，如果前期有很好的归纳和总结的习惯，那么解决此题应该是游刃有余的。虽然这个结论是不能直接用的，但我们可以用函数图像和求导等多种途径来验证它，验证不仅仅是为了验证，而是帮助我们更好地理解公式的实际意义、使用时应该注意的地方和发现数学公式本身的美等等，比如，很明显  $x=0$  时取等，而这一点就是两个函数的切点。经常总结会发现还有一个不等式链在题目中经常涉及到： $(x)$ ，特别是和，经常在导数不等式中出现，且经常用同构的方法来解决。

诚然，需要归纳和总结的地方远远不止这些，比如考试后的总结和反思等。总之，如果只做题目不总结反思，是很难提高数学成绩的，换句话说：同样的刷题量，如果有一个好归纳总结的习惯，那么对高中数学就有更加轻松驾驭的能力，考取高分成为更大的可能。此外归纳总结不仅可以提高数学这门课的成绩，同时这种能力的锻炼和突显本身也是蕴含一种良好的习惯进而形成优秀的品质。

## 参考文献：

- [1] 王宪昌，刘银萍，也谈数学文化与数学教育的关系[J]. 数学教育学报，2002.11(3).
- [2] 徐利治. 徐利治论数学方法学[M]. 济南：山东教育出版社，2001.
- [3] 黄毅英. 数学教育争鸣十题回音[J]. 数学教育学报，1997，6(4)：1-5.