截断 Toeplitz 算子的亚正规性

杨晓媛
（江苏海洋大学 理学院，江苏 连云港 222005）

摘要：Halmos 第五问题提出“是否每个次正规 Toeplitz 算子必然是正规的或者是解析的？”由此引发众多学者对 Toeplitz 算子亚正规性进行研究。截断 Toeplitz 算子是 Toeplitz 算子在模型空间上的限制，自然地，本文对截断 Toeplitz 算子亚正规性进行研究，得到截断 Toeplitz 算子是亚正规算子当且仅当是正规算子。

关键字：模型空间；截断 Toeplitz 算子；亚正规算子

一、引言

从 Halmos 第五问题提出后，众多学者开始对 Toeplitz 算子的亚正规性进行讨论研究，并且取得丰富的研究成果。截断 Toeplitz 算子是 Toeplitz 算子在模型空间上的压缩，自然地也应当被研究。本文主要研究截断 Toeplitz 算子的亚正规性。在此之前，我们先介绍一些概念。

设 D 表示复平面上的开单位圆盘，T 表示其边界，即，单位圆周。单位圆周 T 上关于 Legesgue 测度平方可积的复值函数构成的 Hilbert 空间记为 $L^2 := L^2(T, \frac{1}{2\pi}dt)$。Hardy 空间 H^2 是由单位圆盘上所有泰勒系数平方可和的解析函数构成的 Hilbert 空间。Hardy 空间可以看做是 L^2 的子空间，由负项傅里叶系数为零的函数所构成。设 L^∞ 表示单位圆周上所有本性有界函数构成的 Banach 空间。H^∞ 表示单位圆盘 D 上所有有界解析函数构成的全体。

设 $f \in L^\infty$，L^2 上的乘法算子定义为

$$M_f g = fg, g \in L^2 .$$

Hardy 空间上以 f 为符号的 Toeplitz 算子是乘法算子 M_f 在 Hardy 空间上的限制，定义为

$$T_f g = P(fg), g \in H^2,$$

其中，算子 P 表示从 L^2 到 H^2 的正交投影。

满足 $\left|u(e^{it})\right| = 1$ 几乎处处成立的有界解析函数称为内函数。对于每个非常值内函数 u，模型空间定义为 $K_u^2 = H^2 \ominus uH^2$。模型空间是一个有再生核的 Hilbert 空间，其再生核为

$$k_\lambda^u(z) = \frac{1-\overline{u(\lambda)}u(z)}{1-\bar{\lambda}z}.$$

截断 Toeplitz 算子是 Toeplitz 算子在模型空间上的限制。设 $f \in L^\infty$，算子 P_u 表示从 L^2 到模型空间 K_u^2 的正交投影，定义在模型空间上的截断 Toeplitz 算子作用方式为：

$$A_f^u g = P_u(fg), g \in K_u^2.$$

其中函数 f 称为截断 Toeplitz 算子的符号。对于 $f \in L^2$，截断 Toeplitz 算子可以在模型空间的稠子集 $K_u^2 \cap H^\infty$ 上定义，

$$A_f^u g = P_u(fg), g \in K_u^2 \cap H^\infty.$$

并且以 L^2 函数为符号的截断 Toeplitz 算子可以延拓为模型空间上的有界算子。截断 Toeplitz 算子的符号不唯一，已经证明了 $A_f^u = 0$ 当且仅当 $f \in uH^2 + \overline{uH^2}$。当 $u(0) = 0$ 时，截断 Toeplitz 算子 A_f^u 在集合 $K_u^2 + \overline{K_u^2}$ 中的符号是唯一的。

二、亚正规算子的定义与性质

定义 1. 定义在 Hilbert 空间上的有界线性算子 T，如果满足 $T^*T = TT^*$，则称算子是正规算子（normal operators）。

定义 2. 定义在 Hilbert 空间上的有界线性算子 T，如果满足 $T^*T - TT^* \geq 0$，则称算子是亚正规算子（hyponormal operators）。

定义 3 定义在 Hilbert 空间上的有界线性算子 T，如果算子限制在其不变子空间上是正规算子，则称算子是次正规算子（subnormal operators）。

定义 4 定义在 Hilbert 空间上的有界线性算子 T，如果算子 T 和 T^*T 是可交换的，则称算子是拟正规算子（quasinormal operators）。

容易得出上述四类算子之间满足以下关系：

正规算子 $\subseteq$ 拟正规算子 $\subseteq$ 次正规算子 $\subseteq$ 亚正规算子（*）

也就是说，正规算子一定是拟正规算子，拟正规算子一定是次正规算子，次正规算子一定是亚正规算子。上述包含关系都是真包含，当其满足以下条件时，它们可以是正规算子。

性质 1（1）如果算子 T 是拟正规算子并且满足算子 T 的谱集没有内部，则算子 T 是正规算子。

（2）如果算子 T 是次正规算子并且满足算子 T 的谱集的面积是零，则算子 T 是正规算子。

（3）如果算子 T 是亚正规算子满足算子 T 的谱集是一个弧，则算子 T 是正规算子。

由正规算子定义不难发现，正规算子满足以下性质，证明可以从亚正规的定义得出。

性质 2（1）如果一个有界线性算子 T 是亚正规算子，则 $T + aT$ 是亚正规算子当且仅当 $|a| \leq 1$。

（2）如果 $\|Tf\| \geq \|T^*f\|$ 对任意 $f \in H$ 都成立，则算子 T 是亚正规算子。

（3）如果算子 T 是亚正规算子，则 $M = \left\{x \in H : \|Tx\| = \|T^*x\|\right\}$ 是算子 $T^*T - TT^*$ 的核空间。

（4）如果算子 T 是 Hilbert 空间上紧的亚正规算子，则该算子一定是一个正规算子。

命题 1 如果算子 A, B 都是 Hilbert 空间 H 上的亚正规算子，并且满足 $AB^* = B^*A$，则对于任意复数 a, b，算子 $aA + bB$ 仍是一个亚正规算子。

证明：由于 $AB^* = B^*A$，则 $(AB^*)^* = (B^*A)^*$，即，$BA^* = A^*B.$ 由 $AB^* = B^*A$，故

$$\begin{aligned}
&(aA+bB)^*(aA+bB) - (aA+bB)(aA+bB)^* \\
&= |a|^2(A^*A - AA^*) + |b|^2(B^*B - BB^*) + a\bar{b}(AB^* - B^*A) + \bar{a}b(BA^* - A^*B) \\
&= |a|^2(A^*A - AA^*) + |b|^2(B^*B - BB^*).
\end{aligned}$$

由于算子 A,B 都是 Hilbert 空间 H 上的亚正规算子，可得

$A^*A-AA^*\geq 0, B^*B-BB^*\geq 0.$

因此可得

$(aA+bB)^*(aA+bB)-(aA+bB)(aA+bB)^*\geq 0.$

从而可知对于任意复数 a,b ，算子 $aA+bB$ 都是一个亚正规算子。

三、截断 Toeplitz 算子的亚正规性

虽然截断 Toeplitz 算子是 Toeplitz 算子在模型空间上的限制，但是两者之前存在诸多差异，例如在之前提到的，截断 Toeplitz 算子的符号是不唯一的，但是 Toeplitz 算子的符号是唯一的。在亚正规性上，两者也存在巨大差异。接下来，我们就来证明截断 Toeplitz 算子是亚正规算子当且仅当其是正规算子。在此之前，我们先介绍一种共轭算子。

定义 5 设　是一个 Hilbert 空间，如果算子 C 是 H 上的一个共轭线性算子，并且满足

（1）$\langle f,g\rangle=\langle Cg,Cf\rangle, f,g\in H,$

（2）$C=C^{-1},$

则称算子 C 是共轭算子。

如果存在共轭算子 C 使得算子 T 满足 $CTC=T^*$ ，则称算子 T 是复对称算子。模型空间 K_u^2 有一个自然的共轭算子 C ，作用在边界函数上，作用方式为 $C\varphi=u\overline{z\varphi}$ ，并且所有的截断 Toeplitz 算子关于这个共轭算子 C 都是复对称算子。

定理 1 设 u 是非常值内函数， K_u^2 是相应的模型空间，令 $f\in L^\infty$ ，截断 Toeplitz 算子 A_f^u 是亚正规算子当且仅当是正规算子。

证明：由于模型空间存在一个共轭算子 C ，并且截断 Toeplitz 算子在此共轭算子下是复对称算子，即，

$CA_f^uC=(A_f^u)^*.$

若 A_f^u 是亚正规算子，则

$(A_f^u)^*A_f^u-A_f^u(A_f^u)^*\geq 0.$　　（a）

由此，利用共轭算子的定义可得，

$0\leq C(A_f^u)^*A_f^uC-CA_f^u(A_f^u)^*C=C(A_f^u)^*CCA_f^uC-CA_f^uCC(A_f^u)^*C=A_f^u(A_f^u)^*-(A_f^u)^*A_f^u.$

结合式（a）可知

$(A_f^u)^*A_f^u-A_f^u(A_f^u)^*=0.$

也就是，

$(A_f^u)^*A_f^u=A_f^u(A_f^u)^*.$

因此得知，当截断 Toeplitz 算子是亚正规算子时其一定是正规算子。反之，由（*）式可知，正规算子一定是亚正规算子。由此证明了截断 Toeplitz 算子是亚正规算子当且仅当是正规算子。

从不同的角度可以得出截断 Toeplitz 算子是正规算子的不同刻画。从算子符号的角度，可以对正规截断 Toeplitz 算子给出如下刻画。

命题 2 设 u 是非常值内函数满足 $u(0)=0,$ K_u^2 是相应的模型空间。令 $f=f_1+\overline{f_2}$ ，其中 $f_1,f_2\in K_u^2$ ，则截断 Toeplitz 算子 A_f^u 是正规算子当且仅当或者 $f_2-f_2(0)=\beta(f_1-f_1(0))$ 或者 $f_2-f_2(0)=\beta u(\overline{f_1}-\overline{f_1(0)})$ ，其中， β 是单位圆周上的某一点。

命题 3 设 u 是非常值内函数满足 $u(0)=0,$ K_u^2 是相应的模型空间。令 $f\in L^\infty$ ，截断Toeplitz算子 A_f^u 是正规算子当且仅当下列成立:

（1） A_f^u 属于 B_α^u,其中， α 是单位圆周上的一点；

（2） A_f^u 是自伴截断 Toeplitz 算子和恒等算子的线性组合。

上述命题中的 B_α^u 是一个弱闭的可交换的代数。

例: 设 u 是非常值内函数满足 $u(0)=0,$ K_u^2 是相应的模型空间。对于任意单位圆盘内一点 λ ， $\widetilde{k_\lambda^u}\otimes k_\lambda^u$ 是模型空间上秩为 1 的截断 Toeplitz 算子，算子的符号是函数 $\dfrac{u}{z-\lambda}$ 。其中， $k_\lambda^u(z)=\dfrac{1-\overline{u(\lambda)}u(z)}{1-\overline{\lambda}z},$ $\widetilde{k_\lambda^u(z)}=(Ck_\lambda^u)(z)=\dfrac{u(z)-u(\lambda)}{z-\lambda}$. 利用秩 1 算子的性质 $(\eta\otimes\psi)^*=\psi\otimes\eta$ 以及 $(\eta\otimes\psi)(g\otimes h)=\langle g,\psi\rangle\eta\otimes h$ 可得，

$$\begin{aligned}&(\widetilde{k_\lambda^u}\otimes k_\lambda^u)^*(\widetilde{k_\lambda^u}\otimes k_\lambda^u)-(\widetilde{k_\lambda^u}\otimes k_\lambda^u)(\widetilde{k_\lambda^u}\otimes k_\lambda^u)^*\\&=\left\langle\widetilde{k_\lambda^u},\widetilde{k_\lambda^u}\right\rangle(k_\lambda^u\otimes k_\lambda^u)-\left\langle k_\lambda^u,k_\lambda^u\right\rangle(\widetilde{k_\lambda^u}\otimes\widetilde{k_\lambda^u})\qquad（\#）\\&=\left\|k_\lambda^u\right\|^2(k_\lambda^u\otimes k_\lambda^u-\widetilde{k_\lambda^u}\otimes\widetilde{k_\lambda^u}).\end{aligned}$$

当 $u=z$ 时， $\widetilde{k_\lambda^u}\otimes k_\lambda^u=1\otimes 1$ ，容易验证其是正规算子。

当 $u\neq z$ 时， $\widetilde{k_\lambda^u}\otimes k_\lambda^u$ 不是亚正规算子。假设 $\widetilde{k_\lambda^u}\otimes k_\lambda^u$ 是一个亚正规算子，由定理 2 可知 $\widetilde{k_\lambda^u}\otimes k_\lambda^u$ 是正规算子。那么，由（#）式可知

$k_\lambda^u\otimes k_\lambda^u=\widetilde{k_\lambda^u}\otimes\widetilde{k_\lambda^u}.$

因为 $u(0)=0,$ 故可知常函数 $1\in K_u^2.$ 那么

$(k_\lambda^u\otimes k_\lambda^u)1=(\widetilde{k_\lambda^u}\otimes\widetilde{k_\lambda^u})1.$

即，

$\left\langle 1,k_\lambda^u\right\rangle k_\lambda^u=\left\langle 1,\widetilde{k_\lambda^u}\right\rangle\widetilde{k_\lambda^u}.$

因此可得 $k_\lambda^u=\widetilde{k_\lambda^u}.$ 这暗示了 $u=z.$ 而这与 $u\neq z$ 矛盾。因此假设不成立，从而得当 $u\neq z$ 时 $\widetilde{k_\lambda^u}\otimes k_\lambda^u$ 不是亚正规算子。

四、结论

本文给出亚正规算子的相关性质，同时简单介绍了 Hardy 空间上 Toeplitz 算子的亚正规性，并证明了截断 Toeplitz 算子是亚正规算子当且仅当其是正规算子。由此看出，虽然截断 Toeplitz 算子是 Toeplitz 算子在模型空间上的限制，但是两者的性质存在诸多差异。

参考文献：

[1] 丁宣浩，侯林，李永宁 .Bergman 空间的再生核与 Toeplitz 算子的特征向量 [J]. 数学物理学报：A 辑，2023，43（5）：1333–1340.

[2] 郑益，杨纪龙 . 加权 Bergman 空间上以调和多项式为符号函数的 Toeplitz 算子的亚正规性 [J]. 理论数学，2023.

[3] 王崇潮 . 对偶 Toeplitz 算子与对偶截断 Toeplitz 算子 [D]. 重庆大学，2021.

[4] 崔璞玉，李佳，冯琳颖 .Toeplitz 算子的双正规性和 M– 亚正规性 [J]. 辽宁师范大学学报（自然科学版），2022（003）：045.

[5] 刘朝美，蒋志娟 . 加权 Bergman 空间上具有调和符号的斜 Toeplitz 算子的正规性及亚正规性 [J]. 应用数学进展，2023，12(4)：14.

基金项目：江苏省自然科学基金（SBK2023042610）