

《乘法分配律》不同版本教材学习路径的比较与分析

江建珍
(深圳市宝安区天骄小学, 广东 深圳 518000)

摘要: 本文以中美教材为研究对象, 从多元表征角度比较和分析了三种版本乘法分配律的学习路径。得到的启示: 重视前期的渗透和后续的应用; 重视乘法分配律的验证和解释; 重视乘法分配律模型的建构; 重视乘法分配律的拓展。

关键词: 乘法分配律; 学习路径; 教材比较; 表征

一、问题提出

四年级学生对“乘法分配律”外在形式的理解并不困难, 但大多数停留在机械模仿和记忆阶段, 主要原因有: 一是“乘法分配律是唯一一个沟通了乘法和加法两种运算的运算律” 相对其他运算律学生的理解和运用的难度都提高了。二是乘法分配律有各种变式应用, 尤其学生在小数、分数和百分数的运算中不能灵活应用乘法分配律进行简便计算, 究其原因还是对规律的本质不理解。三是重形式、轻实质的教学方式导致有些教师教学时淡化了内在算理的挖掘, 导致学生缺乏对规律的言语表征和可视化表征。

二、研究内容与方法

(一) 研究内容

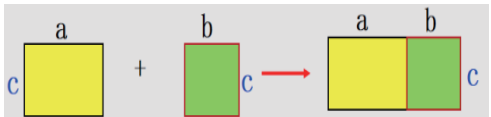
围绕“乘法分配律”这一内容, 选取中国的苏教版、北师大版和美国的加利福尼亚版教材进行学习路径比较研究。

(二) 研究方法

学习路径就是为了达成教学目标而设计的任务序列, 这些任务之间具有一定的逻辑递进关系, 这些任务是指向教学目标的。

1. 表征类型与层次

表 1 乘法分配律理解的表征类型

表征类型	概述
程序表征	只能套用乘法分配律的形式, 能写出形如 $(25+3) \times 4=25 \times 4+3 \times 4$, 但不能解释等式两边相等的理由。
事实表征	通过计算结果解释乘法分配律为什么会成立。例如 $(25+3) \times 4=112$, $25 \times 4+3 \times 4=112$, 所以, $(25+3) \times 4=25 \times 4+3 \times 4$ 。
直观表征	结合现实生活情境或者图示对乘法分配律作解释。例如购物、贴瓷砖都属于情境直观, 画点子图或画面积图都属于几何直观。
抽象表征	用乘法、加法意义解释其合理性。例如 $(25+3) \times 4$ 表示 $(25+3)$ 个 4, 而 $25 \times 4+3 \times 4$ 表示 25 个 4 加上 3 个 4。
形式表征	用文字、字母表示并解释乘法分配律。例如 $a \times c+b \times c=(a+b) \times c$, 右边表示 a 个 c 加上 b 个 c, 左边表示 $(a+b)$ 个 c。 

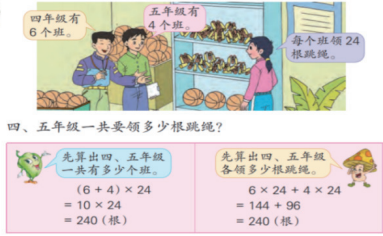
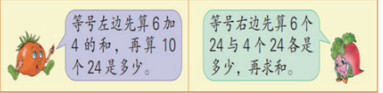
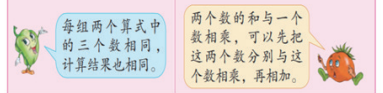
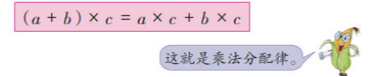
三、结果与分析

(一) 各版本教材的学习路径分析

本研究从苏教版、北师大版两种版本教材的学习路径进行分析。

1. 苏教版教材的学习路径分析

表 2 苏教版教材呈现的乘法分配律学习路径

规律认知的一般过程	任务序列	表征方式
操作感知 乘法分配律	任务 1: 四、五年级一共要领多少根跳绳? 	直观表征: 结合情境直观感知乘法分配律。 事实表征: 通过计算发现等式是相等的。
归纳概括 乘法分配律	任务 2: 比一比, 等号两边的算式有什么联系? 	抽象表征: 用几个几解释“合并算”和“分开算”
验证规律 归纳规律	任务 3: 再写几个这样的等式, 和同学说说有什么发现? 	事实表征: 通过观察发现等式两边的结果相等。
	任务 4: 如果用字母分别表示三个数, 上面的规律可以写成: $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$ 	形式表征: 用字母来表示乘法分配律。(不解释)

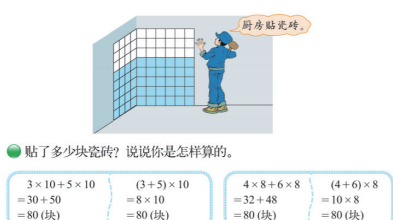
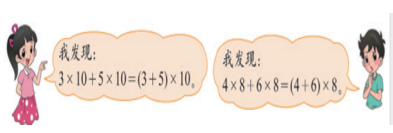
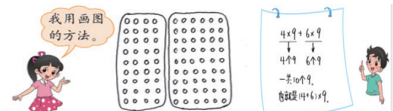
本教材的学习路径具有如下特点:

从表征类型看, 包含直观表征、事实表征和抽象表征。虽然也用文字、字母进行了形式表征, 但是形式表征不完整——没有

在此基础上用乘法的意义解释规律的合理性,教材也没有借助任何直观表征乘法分配律。

2. 北师大版教材的学习路径分析

表3 北师大版教材乘法分配律学习路径

规律认知的一般过程	任务系列	表征方式
操作感知 乘法分配律	任务1: 贴了多少块瓷砖? 说说你是怎样算的?  图5	直观表征: 结合情境直观感知乘法分配律。 事实表征: 通过计算发现两组算式结果相等。
归纳概括 乘法分配律	任务2: (1) 观察两组算式, 你有什么发现?  图6 (2) 如果用字母 a、b、c 代表三个数, 你能写出上面发现的规律吗?	形式表征: 用字母表达式表示乘法分配律。 (不解释)
验证解释 乘法分配律	任务3: 请你结合 $4 \times 9 + 6 \times 9$ 这个算式说明乘法分配律是成立的。  图7	直观表征: 画点子图解释。 抽象表征: 用几个几加几个等于几个几。

本教材的学习路径具有如下特点:

从表征类型看, 包含直观表征、事实表征和抽象表征、形式表征。直观表征是结合“贴瓷砖”情境, 从理解算理的角度, 借助几个几帮助学生理解算式的两边是相等的。但学生思考似乎停在“瓷砖总数相等”这一答案上, 没有对两个算式外在形式特点进行对比分析。另两种解法学生既要观察颜色和位置, 耗时多效果差。教材虽也用文字、字母进行了形式表征 $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$, 有“合”到“分”, 但没有“分”到“合”形式。

(二) 各版本教材的学习路径的异同

1. 苏教版创设的“跳绳”情境与乘法分配律的运算意义表征相关联, 但只适用于理解整数范围内乘法分配律的应用。北师大

版创设的“贴瓷砖”情境蕴藏了面积模型, 便于学生理解乘法分配律的运算意义表征, 但比较耗时。

2. 北师大版教材根据两个算式就用字母表示乘法分配律, 学生感知不充分, 苏教版教材的让学生先仿写多道算式后再用字母概括规律, 验证解释规律。

3. 北师大版教材结合点子图和乘法的意义解释乘法分配律, 让学生多角度去理解乘法分配律的本质内涵值得借鉴。

四、比较研究对教学的启示

(一) 重视前期的渗透和后续应用

二年级学习乘法口诀用点子图、数线图与算式相结合, 直接呈现了乘法分配律的雏形。三年级两位数乘一位数引导学生思考理解竖式的每一步的意义, 就是乘法对加法分配律的应用。五年级的小数乘法, 长方体的表面积计算公式, 六年级的分数混合运算等均有乘法分配律的应用。了解乘法分配律在教材中的整体框架, 才能寻找更适合学生理解的乘法分配律学习路径。

(二) 重视乘法分配律的验证和解释

乘法分配律的教学普遍采用不完全归纳推理, 教学时需要多举出几个像这样的例子(正例)后追问: “这样的例子能举完吗? 能举出一个反例吗?” 还要努力帮助学生用多元表征对所说的规律作出自己的解释和说明。

(三) 重视乘法分配律模型建构

教学时可以将乘法分配律算式与两个长方形面积之和建立联系, 构建比较容易理解的图形模型。从模型的角度来组织教学, 可以更加凸显“抽象—推理—建模”的数学基本思想, 体会数学的学科特征。

参考文献:

- [1] 孙京京. 苏教版与加州版小学数学教材“乘法分配律”的比较研究[J]. 数学学习与研究, 2022(33): 119-121.
- [2] 柯媛. “乘法分配律”中日教材比较研究——以冀教版和东京版为例[J]. 教学月刊: 小学版(数学), 2021(7): 4.
- [3] 周根生执教, 王岩评析. “乘法分配律”教学实录与评析[J]. 小学数学教育, 2021(11): 3.