

人工智能赋能下的高等数学教学改革： 泰勒公式教学案例研究

郑金亮 韩 钰 李双东 方 强

(安徽大学江淮学院公共基础教学部, 安徽 合肥 230031)

摘要: 本文详细分析了AI技术在提升高等数学教育质量中的作用,特别聚焦于泰勒公式教改,展示了AI如何推动教育创新及效率增进。分析现行教育模式后,文中揭示传统方法在个性化学习、即时反馈及构建动态互动环境方面的不足。文章通过案例与数据进一步证明, AI工具和平台(例如智能系统和虚拟实验室)如何有效增强学生对高等数学,尤其是泰勒公式的掌握。研究还探讨了AI在推动个性化学习路径、激发学生主动学习及批判性思维方面的可能性。最终,基于研究成果,提出一系列建议,旨在结合传统与AI技术,优化高等数学教学与学习流程。

关键词: AI; 高等数学; 泰勒公式; 教学改革; 个性化学习路径; 即时反馈; 互动学习体验; 教育技术

一、引言

(一) 研究背景

在当代教育环境中,人工智能(AI)技术的进步促进了教育方法和工具的创新。特别是在高等数学领域,泰勒公式作为一个关键概念,对学生的逻辑思维和解决问题的能力有重要影响。然而,由于其抽象性和复杂性,学生往往难以理解和掌握。传统教学方法在直观性和互动性方面存在限制。近年来,AI在教育领域的应用展示了巨大潜力。在数学教学中,AI能够提供更直观的学习材料,例如通过数据可视化和动态模拟来展示数学概念,并根据学生的学习进度和反馈提供个性化的学习建议。这些创新性方法有望有效提高学生对泰勒公式等重要数学概念的理解和掌握。

(二) 研究目的

本文旨在探究人工智能技术在高等数学中,特别是泰勒公式教学的应用。研究目标包括:(1)回顾AI在数学和工程教育中的应用现状和趋势;(2)通过实证研究评估AI辅助教学对学生泰勒公式学习效果的影响,包括成绩、理解程度和学习兴趣的变化;(3)基于研究结果提出针对性的教学策略和建议,以优化未来的高等数学教学。

二、泰勒公式基础

定义与表述:

泰勒公式,以数学家布鲁克·泰勒的名字命名,是高等数学中一个极为重要的概念,它提供了一种将可微函数在某一点的局部近似为多项式的方法。这一公式不仅在理论研究中占有重要地位,也是实际应用中不可或缺的工具。

数学上,泰勒公式的精确表述是这样的:设 $f(x)$ 是在包含点 a 的某个区间上 n 阶可导的函数,那么对于该区间内的任意点 x , $f(x)$ 可以表示为以下泰勒公式:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

其中, $R_n(x)$ 是余项,表达了多项式近似和实际函数值之间的差异。

泰勒公式的核心思想是通过函数在某一点的导数信息,构建一个多项式来近似原函数。这一过程不仅揭示了函数的局部性质,也为复杂函数的分析和计算提供了强有力的工具。

泰勒公式在多个学科领域,如物理学和经济学,都被广泛应用。

三、AI在数学教学中的角色

在现代教育技术的发展中,人工智能(AI)已成为推动数学教育创新的关键因素。AI的计算能力、数据处理和学习算法为数学教学提供了个性化、互动性和高效的新途径。本节旨在探讨AI如何改变数学教学方法,为学生带来更丰富、灵活和有效的学习体验。

(一) AI技术与数学教学的融合

AI技术在数学教学中的应用包括:(1)构建个性化学习路径,通过机器学习算法分析学生的学习行为和偏好,制定符合个人需求的学习计划,提高学习效率;(2)实现动态评估与即时反馈,通过智能分析学生的答题过程,及时给出反馈和建议,促进学生的自主学习和问题解决能力;(3)创造互动式和沉浸式学习体验,利用自然语言处理和虚拟现实技术,提供直观生动的学习环境,增强学生的学习兴趣和参与度。

(二) 数学教学方法的变革

AI技术在数学教学中实现了三个重要转变:(1)从以教师为中心到以学生为中心,鼓励主动学习并注重学生的主体性;(2)从静态内容到动态互动,通过多元化的互动方式使数学学习更活跃;(3)从普通教学到个性化教学,根据每位学生的需求进行教学内容和路径的优化。这些转变不仅提高了学习效率和质量,也为教育技术的发展铺平了道路。特别是在理解复杂数学概念如泰勒公式方面,AI辅助教学通过提供个性化学习途径和互动式体验,有效增进了学生的理解。

四、教学案例设计与实施

为了探索一个应用案例,我们可以考虑使用泰勒公式来近似计算正弦函数 $\sin x$ 。这个案例不仅展示了泰勒公式在计算三角函数近似值中的应用,而且通过编程来实现这一过程,学生可以更深刻地理解泰勒公式的数学原理和计算技巧。

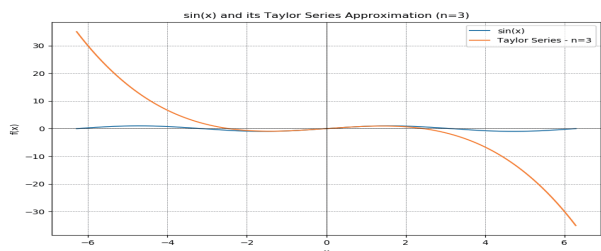
(一) 案例设计与实施步骤

首先,介绍正弦函数 $\sin x$ 的泰勒公式展开式:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_n(x)$$

其中 $R_n(x)$ 是余项。

下面利用 AI 技术 (chatgpt) 来实现 $\sin x$ 的泰勒展开式中的 $n=3$, $n=7$ 与原函数的图像比较



这幅图显示了 $\sin x$ 的函数图像以及其在 $n=3$ 时的泰勒公式近似图像。可以看到, 泰勒公式近似 $(x - \frac{x^3}{3!})$ 在原点附近较为准确地模拟了 $\sin x$ 的行为, 但随着 x 值的增大, 两者之间的差距也随之增加。这说明了泰勒公式在展开点附近的有效性, 以及为什么我们可能需要更高阶的项来提高远离展开点的精度。

上图是 AI 基于 Python 语言编程实现:

```
Import matplotlib.pyplot as plt
```

```
Import numpy as np
```

```
#Define the function and its Taylor approximation with n=3
```

```
x=np.linspace (-2*np.pi, 2*np.pi, 400)
```

```
sin_x=np.sin (x)
```

```
taylor_approx_n3=x-x**3/np.math.factorial (3)
```

```
#Plotting
```

```
plt.figure (figsize= (10, 6))
```

```
plt.plot (x, sin_x, label=' sin (x) ')
```

```
plt.plot (x, taylor_approx_n3, label=' Taylor Series-n=3 ')
```

```
plt.title ( ' sin (x) and its Taylor Series Approximation (n=3) ')
```

```
plt.xlabel ( ' x ')
```

```
plt.ylabel ( ' f (x) ')
```

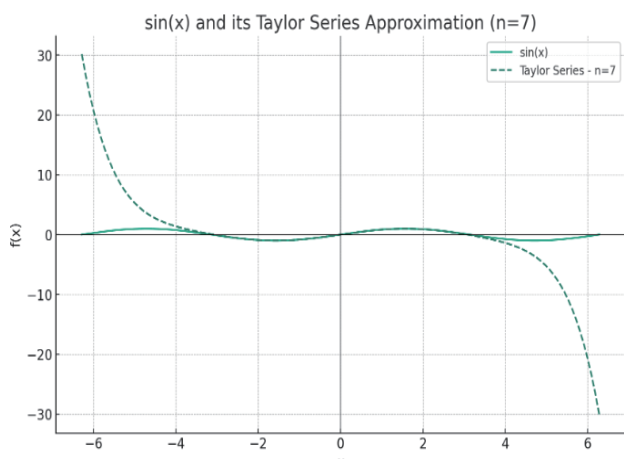
```
plt.axhline (0, color=' black ', linewidth=0.5)
```

```
plt.axvline (0, color=' black ', linewidth=0.5)
```

```
plt.grid (color=' gray ', linestyle=' -- ', linewidth=0.5)
```

```
plt.legend ()
```

```
plt.show ()
```



这幅图展示了 $\sin x$ 的函数图像以及其在 $n=7$ 时的泰勒公式近似图像。与 $n=3$ 的情况相比, 我们可以观察到 $n=7$ 的泰勒公式近似在更宽的 x 范围内更加精确地模拟了 $\sin x$ 的真实行为。这说明

了通过增加泰勒公式的项数 (即增加展开的阶数), 我们可以提高函数近似的精度, 尤其是在展开点 (本例中为 0 点) 附近的范围。

(二) 结果分析与讨论

在这个案例中, 学生将学习如何使用 Python 编程来实现泰勒公式的计算过程, 同时理解增加项数如何影响近似值的准确度。通过比较计算结果与实际值, 学生可以直观地看到泰勒公式在近似计算中的有效性和限制。

(三) 预期学习成果

通过本案例, 学生将能够理解并应用泰勒公式近似计算三角函数值, 掌握使用编程语言如 Python 实现数学公式计算的技能, 理解泰勒公式与计算精度的关系, 并增强编程解决数学问题的能力。此案例展示了泰勒公式在数学和编程结合时的应用, 通过实际编程操作加深学生对理论的理解, 并锻炼编程解决复杂数学问题的能力, 对培养数学思维和编程技能具有重要意义。在案例教学中, AI 工具可辅助理解和可视化泰勒公式, 提供个性化学习路径和即时反馈, 从而增强教学效果。

五、结果分析与讨论

在采用 AI 辅助教学方法进行泰勒公式等数学概念的教学之后, 对教学结果进行分析与讨论是至关重要的步骤。这不仅可以帮助评估 AI 教学方法的有效性, 还可以为未来的教学实践提供改进的方向。以下是对学生和教师反馈的汇总分析以及基于实践经验的改进建议。

(一) 教学反馈汇总与分析

学生和教师反馈表明, AI 辅助教学在数学教学中具有积极影响, 但也存在挑战。学生欣赏 AI 提供的个性化学习路径和互动模拟工具, 但一些学生在初次使用时感到不适应, 且在没有教师直接指导下理解复杂问题有困难。教师认为 AI 工具提高了教学效率, 但在复杂思维和深层理解方面, 教师的直接介入仍然不可替代。

改进建议包括增强 AI 工具的用户友好性, 融合教师直接指导与 AI 辅助教学, 持续优化个性化学习路径, 以及增设互动讨论与合作学习环节。通过不断收集和分析反馈, 以及基于实践的改进, 可以优化 AI 教学方法, 实现更高效和有效的教学实践。未来的教学设计应结合 AI 技术的优势和教师的专业指导, 以提供更丰富、深入和个性化的学习体验。

参考文献:

- [1] 周益民, 田玲, 陈文宇. 人工智能专业体系建设探索 [J]. 高教学刊, 2020 (16): 92-96.
- [2] 黄河燕. 新工科背景下人工智能专业人才培养的认识与思考 [J]. 中国大学教学, 2019 (2): 20-25.
- [3] 谷志群, 纪越峰, 顾仁涛. “人工智能+X”教学模式下智能信息网络课程建设 [J]. 高等工程教育研究, 2021 (4): 93-97.
- [4] 温文媛, 方玉明, 韩加林. 人工智能环境下大学数学的教学模式探讨 [J]. 数学学习与研究, 2021 (4): 25-26.
- [5] 杨卓, 刘冬. 高等数学在人工智能中的应用分析 [J]. 科技视界, 2021 (6): 11-12.
- [6] 张林泉. 人工智能背景下高等数学教学探索与实践——基于计算思维与辩证法的视角 [J]. 高等数学研究, 2022 (7): 36-39.
- [7] 孟青泉, 贾积有. 人工智能教育研究及应用中的问题剖析与发展建议 [J]. 人工智能, 2019 (3): 110-118.

基金项目: 2020 安徽省质量工程教学研究项目“本科院校高等数学在线课程改革与实践”(项目编号 2020jyxm0110)

作者简介: 郑金亮 (1979-) 男, 安徽合肥人, 讲师, 硕士, 研究方向为基础数学。