

四阶不定椭圆边值问题非实特征值的上界估计

达举霞 章 欢

(兰州资源环境职业技术大学, 兰州 730070)

摘要: 本文研究四阶不定权椭圆问题在 $[0, 1]$ 区间上满足一定边界条件下的非实特征值, 对其可能存在的非实特征值进行了上界估计, 且权函数是变号的.

关键词: 椭圆边值问题; 不定权; 非实特征值

一、引言

本文运用孙付在中讨论不定特征值问题的方法和工具来研究四阶不定权椭圆问题

$$\tau u = \Delta^2 u + au = \lambda \omega u, y \in L^2_{|\omega|}(\Omega), \quad (1)$$

在边界条件

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \Delta u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (2)$$

下的非实特征值, 对其可能存在的非实特征值进行了上界估计. 其中 Ω 为 $R^n, n \geq 2$ 中的有界开集且 a, ω 都为实值函数, 满足

$$\omega(x) \neq 0 a.e. x \in \Omega, \omega \in L^1(\Omega), a \in L^\infty(\Omega), \quad (3)$$

λ 是谱参数, 权函数 $\omega(x)$ 在 Ω 是变号的. 记

$$\tau u = \Delta^2 u + au = \lambda |\omega| u, L^2_{|\omega|}(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0, \Delta u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (4)$$

是问题 (1) 对应的右定问题.

二、预备知识

定义 Sobolev 空间: $W_0^{3,4}(\Omega)$ 及 Sobolev 范数 $\|u\|_{3,4} = (\int_{\Omega} (|u|^4 + |\nabla u|^4 + |\nabla^3 u|^4))^{1/4}$. 令 $T := \frac{1}{\omega} \tau, D(T) := D(S)$ 是 (1)

式的算子且 $S := \frac{1}{|\omega|} \tau$ 是 (4) 式一个无界自伴算子, 其定义域

$$D(S) := \left\{ u \in W_0^{3,4}(\Omega) : \frac{1}{\omega} \tau u \in L^2_{|\omega|} \right\}.$$

假设 λ 是问题 (1) - (2) 的非实特征值且 $\varphi \in W_0^{3,4} = W_0^{3,4}(\Omega)$ 是相应的特征函数. 即, $\varphi|_{\partial\Omega} = 0, \Delta \varphi|_{\partial\Omega} = 0$ 且满足

$$\Delta^2 \varphi + a\varphi = \lambda \omega \varphi. \quad (5)$$

选取 φ 满足 $\int_{\Omega} |\varphi|^2 = 1$ 以及 $\|\varphi\|_c = 1$. 给出引理对 $\nabla \varphi$ 进行估计.

引理 1 令 φ 的定义同上 (证明见文 [2-4]). 则

$$\int_{\Omega} |\nabla^2 \varphi|^2 \leq \|a_-\|_{\infty} \int_{\Omega} |\varphi|^2 = \|a_-\|_{\infty}. \quad (6)$$

引理 2 令 φ 的定义同上. 则存在 $\delta_0 > 0, \varepsilon_0 > 0$, 使得

$$\text{mes}\{|\varphi| > \delta_0\} \geq \varepsilon_0, \quad (7)$$

其中 $\delta_0 = \frac{c_0}{2|\Omega|}$ 且 $\varepsilon_0 = \frac{c_0^2}{4}$; 当 $n = 2$ 时,

$$c_0 = K^{-3}(1 + \|\varphi\|_{\Omega}^4 \text{mes}(\Omega))^{\frac{3}{4}}, \quad \text{当 } n > 2 \text{ 时},$$

$$c_0 = K^{-\frac{n}{2}}(1 + \|\varphi\|_{\Omega}^4 \text{mes}(\Omega))^{\frac{n}{8}}; \text{证明过程略.}$$

三、特殊情形下非实特征值的上界估计

首先, 令权函数 $\omega(x)$ 为

$$\omega(x) = \begin{cases} -1, x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega_1 := (-1, 0) \times \prod_{i=1}^{n-1} (0, 1), \\ 1, x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega_2 := \prod_{i=1}^n (0, 1). \end{cases} \quad (8)$$

令定义域为 $\Omega := \Omega_1 + \Omega_2$.

定理 1 假设 $a \in L^\infty(\Omega)$ 以及 ω 的定义见 (8). 对任意的 (1) 的非实特征值 λ , 有估计

$$|\text{Re } \lambda| \leq \frac{16}{\delta_0^2 \varepsilon_0} (\|\varphi\|_{\Omega} (1 + \|a\|_{\infty}^{\frac{1}{2}}) + 2\|a\|_{\infty}), \quad (9)$$

$$|\text{Im } \lambda| \leq \frac{16}{\delta_0^2 \varepsilon_0} \|\varphi\|_{\Omega} (1 + \|a\|_{\infty}^{\frac{1}{2}}). \quad (10)$$

δ_0, ε_0 的定义见引理 2.

证明 (1) 式给定的非实特征值 λ 以及对应的特征函数 φ , 满足 $\int_{\Omega} |\varphi(x)|^2 = 1$. 记 $\|\varphi\|_{\Omega} = \max\{|\nabla \varphi|, |\nabla^2 \varphi|, |\nabla^3 \varphi|\}$. 并由引理 2, 假设

$$\text{mes}\{(|\varphi| > \delta_0) \cap \Omega_2\} \geq \frac{\varepsilon_0}{2}. \quad (11)$$

在 (5) 的两边同时乘以 $\bar{\varphi}$, 在 $I_t := [0, t] \times \prod_{i=1}^{n-1} [0, 1]; t \in [1 - \frac{\varepsilon_0}{4}, 1]$ 上用格林函数第一公式并由 $\varphi|_{\partial\Omega} = 0, \Delta \varphi|_{\partial\Omega} = 0$, 可得

$$\begin{aligned} & \int_{\partial \Omega_1^+} \frac{\partial^3 \bar{\varphi}}{\partial x_1^3} \varphi(t, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n - \int_{\partial \Omega_1^+} \frac{\partial^3 \bar{\varphi}}{\partial x_1^3} \nabla \varphi(t, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n + \int_{I_t} (|\nabla^2 \varphi|^2 + a|\varphi|^2) \\ & = \lambda \int_{I_t} \omega |\varphi|^2. \end{aligned} \quad (12)$$

由 $\Omega_2 = \prod_{i=1}^n [0, 1]$, (11) 可得对任意的 $t \in [1 - \frac{\varepsilon_0}{4}, 1]$, 有

$$\text{mes}\{(|\varphi| > \delta_0) \cap I_t\} \geq \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

再加上在 Ω_2 上 $\omega = 1$, 推出 (12) 右边的绝对值

$$\geq \frac{1}{4} |\lambda| \delta_0^2 \varepsilon_0. \quad (13)$$

在 $[1 - \frac{\varepsilon_0}{4}, 1]$ 上对 (12) 的右边关于 t 积分, 有

$$\int_{1-\frac{\varepsilon_0}{4}}^1 \left| \lambda \int_{\Omega} \omega |\varphi|^2 \right| \geq \int_{1-\frac{\varepsilon_0}{4}}^1 \frac{1}{4} |\lambda| \delta_0^2 \varepsilon_0 = \frac{1}{16} |\lambda| \delta_0^2 \varepsilon_0^2. \quad (14)$$

在 $\left[1-\frac{\varepsilon_0}{4}, 1\right]$ 上对 (12) 的左边关于 t 积分, 并由柯西不等式

以及 $\int_{\Omega} |\varphi(x)|^2 = 1$, $\|\varphi\|_{\Omega} = \max\{|\nabla\varphi|, |\nabla^2\varphi|, |\nabla^3\varphi|\}$ 和引理 1, 有

$$\begin{aligned} & \left| \int_{1-\frac{\varepsilon_0}{4}}^1 \int_{\partial_{t=1}^{t=1}[0,1]} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_1^3} \varphi(t, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n - \int_{\partial_{t=1}^{t=1}[0,1]} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \nabla \bar{\varphi}(t, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n \right| \\ & \leq \left| \int_{1-\frac{\varepsilon_0}{4}}^1 \int_{\partial_{t=1}^{t=1}[0,1]} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_1^3} \varphi(t, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n \right| + \left| \int_{1-\frac{\varepsilon_0}{4}}^1 \int_{\partial_{t=1}^{t=1}[0,1]} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \nabla \bar{\varphi}(t, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n \right| \\ & < \left(\int_{\Omega_2} \left| \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_1^3} \right|^2 \int_{\Omega_2} |\varphi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Omega_2} \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \right|^2 \int_{\Omega_2} |\nabla \bar{\varphi}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & < \|\varphi\|_{\Omega} (1 + \|a\|_{\infty}^{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

和

$$\int_{1-\frac{\varepsilon_0}{4}}^1 \left| \int_{\Omega} (|\nabla^2 \varphi|^2 + a |\varphi|^2) \right| dt < \int_{\Omega_2} (|\nabla^2 \varphi|^2 + a |\varphi|^2) \leq 2 \|a\|_{\infty}. \quad (15)$$

由 (13) - (15) 可以给出 $|\lambda|$ 的估计

$$\|\varphi\|_{\Omega} (1 + \|a\|_{\infty}^{\frac{1}{2}}) + 2 \|a\|_{\infty} \geq \frac{1}{16} |\lambda| \delta_0^2 \varepsilon_0^2. \quad (16)$$

由 (12), 可得

$$\operatorname{Im} \left(\int_{\partial_{t=1}^{t=1}[0,1]} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_1^3} \varphi(t, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n - \int_{\partial_{t=1}^{t=1}[0,1]} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \nabla \bar{\varphi}(t, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n \right) = \operatorname{Im} \lambda \int_{\Omega} \omega |\varphi|^2.$$

现假设权函数 $\omega(x)$ 满足

$$a \in L^{\infty}(\Omega), \omega(x) \in W^{3,4}(\Omega), \omega(x) \neq 0 a.e. x \in \Omega. \quad (17)$$

因为 $\omega(x) \neq 0 a.e. x \in \Omega$, 故存在 ω_0 使得 $\operatorname{mes}\{\Omega - \Omega_0\} < \frac{\varepsilon_0}{2}$, 其中

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega : |\omega(x)| > \omega_0\}. \quad (18)$$

令

$$\omega_0 = \max\{|\omega(x)| : x \in \Omega\} < \infty, \omega_1 = \max\{|\nabla \omega(x)| : x \in \Omega\} < \infty,$$

$$\omega_2 = \max\{|\nabla^2 \omega(x)| : x \in \Omega\} < \infty. \quad (19)$$

定理 2 a, ω 满足条件 (17). 对任意的 (1) - (2) 的非实特

征值 λ , 有估计

$$|\operatorname{Re} \lambda| \leq \frac{2 \|a\|_{\infty}^{\frac{1}{2}}}{\omega_0^2 \delta_0^2 \varepsilon_0} (2 \omega_0 \|a\|_{\infty}^{\frac{1}{2}} + 2 \omega_1 \|\varphi\|_{\Omega} + \omega_2), \quad (20)$$

$$|\operatorname{Im} \lambda| \leq \frac{2 \|a\|_{\infty}^{\frac{1}{2}}}{\omega_0^2 \delta_0^2 \varepsilon_0} (2 \omega_1 \|\varphi\|_{\Omega} + \omega_2). \quad (21)$$

$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \varepsilon_0, \delta_0$ 的定义见 (19), 引理 2 以及 (18).

证明 对给定的 (1) 的非实特征值 λ 以及相应的特征函数 φ

, $\int_{\Omega} |\varphi(x)|^2 = 1$, $\|\varphi\|_{\Omega} = \max\{|\nabla\varphi|, |\nabla^2\varphi|, |\nabla^3\varphi|\}$, 由引理 2 以及 (19),

推出

$$\operatorname{mes}\{(|\varphi| > \delta_0) \cap \Omega_0\} \geq \frac{\varepsilon_0}{2}. \quad (22)$$

在 (5) 的两边同时乘以 $\omega \bar{\varphi}$, 在 Ω 上积分并用格林公式且由 $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$, $\Delta\varphi|_{\partial\Omega} = 0$, 可得

$$2 \int_{\Omega} \nabla^2 \varphi \nabla \omega \bar{\varphi} + \int_{\Omega} \nabla^2 \varphi \nabla^2 \omega \bar{\varphi} + \int_{\Omega} \omega (|\nabla^2 \varphi|^2 + a |\varphi|^2) = \lambda \int_{\Omega} \omega^2 |\varphi|^2. \quad (23)$$

运用 $\int_{\Omega} |\varphi|^2 = 1$, $\omega_0 = \max\{|\omega(x)| : x \in \Omega\}$ 以及 (6), 见引理 1, 可得

$$\left| \int_{\Omega} \omega (|\nabla^2 \varphi|^2 + a |\varphi|^2) \right| \leq 2 \omega_0 \|a\|_{\infty}. \quad (24)$$

由

$\omega_1 = \max\{|\nabla \omega(x)| : x \in \Omega\}$, $\omega_2 = \max\{|\nabla^2 \omega(x)| : x \in \Omega\}$, $\int_{\Omega} |\varphi|^2 = 1$, 施瓦茨不等式以及引理 1, 得到

$$\left| \int_{\Omega} \nabla^2 \varphi \nabla \omega \bar{\varphi} \right| \leq \omega_1 \left(\int_{\Omega} |\nabla^2 \varphi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\nabla \bar{\varphi}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \omega_1 \|\varphi\|_{\Omega} \|a\|_{\infty}^{\frac{1}{2}}, \quad (25)$$

$$\left| \int_{\Omega} \nabla^2 \varphi \nabla^2 \omega \bar{\varphi} \right| \leq \omega_2 \left(\int_{\Omega} |\nabla^2 \varphi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\varphi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \omega_2 \|a\|_{\infty}^{\frac{1}{2}}, \quad (26)$$

$$\left| \int_{\Omega} \nabla^2 \varphi \nabla \bar{\varphi} \omega \right| \leq \omega_1 \left(\int_{\Omega} |\nabla^2 \varphi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\nabla \bar{\varphi}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \omega_1 \|a\|_{\infty}^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{\Omega}, \quad (27)$$

由 Ω_0 的定义和 (23), 推出 (23) 右边的积分, 满足

$$\int_{\Omega} \omega^2 |\varphi|^2 > \int_{(|\varphi| > \delta_0) \cap \Omega_0} \omega^2 |\varphi|^2 \geq \frac{1}{2} \omega_0^2 \delta_0^2 \varepsilon_0. \quad (28)$$

注意到由 (23), 可得

$$\operatorname{Im} \left(\int_{\Omega} \nabla^2 \varphi \nabla \omega \bar{\varphi} + \int_{\Omega} \nabla^2 \varphi \nabla^2 \omega \bar{\varphi} + \int_{\Omega} \nabla^2 \varphi \nabla \bar{\varphi} \omega \right) = \operatorname{Im} \lambda \int_{\Omega} \omega^2 |\varphi|^2.$$

因此, 利用 (23) - (28) 可以推出 (21). 证毕.

参考文献:

- [1] 孙付. 不定问题的非实特征值 [J]. 山东大学, 2020.
 - [2] 达举霞. 四阶两点边值问题 3 个对称正解的存在性 [J]. 华南师范大学学报 (自然科学版), 2021, 53 (1): 90-93.
 - [3] 林府标, 杨欣霞, 张千宏. 一类积分 - 偏微分群体平衡方程的非完全不变群及显式精确解 [J]. 华南师范大学学报 (自然科学版), 2023, 55 (5): 72-79.
 - [4] 陈剑, 曾泰山. 时间分数阶扩散方程的多层扩充算法 [J]. 华南师范大学学报 (自然科学版), 2020, 52 (3): 106-110.
- 兰州资源环境职业技术大学校级科研项目《几类不定权问题非实特征值的研究》(项目编号 X2023A-01)