关于 Lagrange 乘子法的教学探讨

陈南博　李玉山

（桂林电子科技大学 数学与计算科学学院，广西 桂林 541001）

摘要：Lagrange 乘子法作为求解条件极值的一种有效方法，在多元微积分理论中占据重要地位 . 本文从教学的角度出发，指出在应用中忽略约束函数的临界点将导致 Lagrange 乘子法失效 . 其次，本文利用几何直观阐述了 Lagrange 乘子的几何意义，并通过约束优化问题给出了乘子的另一种解释 .

关键词：Lagrange 乘子法；驻点；条件极值；最值

引言

Lagrange 乘子法是多变量微积分教学中的重点内容，用于求解定义在另一函数水平集上函数的极值问题 . 在约束优化、非线性分析、经济学等领域具有广泛的应用 . 在教学中我们发现，学生往往直接套用公式，而忽略了定理的条件 . 另一方面，学生对 Language 乘子常常感到疑惑，而目前的一些教材在这两点上没有给出足够的重视 . 为此，本文探讨了 Lagrange 乘子法的梯度条件，并给出了 Lagrange 乘子的意义 .

设 U 是 $\mathbb{R}^n(n\geq 2)$的开集， $f,\ g{:}\,U\to\mathbb{R}$ 是 U上的多元函数，令水平集 $A=\{x\in U|g(x)=\ c\}$， f在A上的极值称为条件极值，方程 $g(x)=c$称为约束条件 . 为简便，我们仅考虑一个约束条件的情形，相应地 Lagrange 乘子定理陈述如下：

定理 1（Lagrange 乘子法）. 设 f,g为 U上的 C^1光滑函数，点 $p\in A$满足：（1） $\nabla g(p)\neq 0$；（2） $p\in A$为函数 f的条件极值点 . 那么，存在实数 λ，使得 $\nabla f(p)+\lambda\nabla g(p)=0$.

应用 Lagrange 乘子法求解极值的常规步骤如下（以 n=2 为例）：

1）作辅助函数 $L(x_1,x_2,\lambda)=f(x)+\lambda(g(x)-c)$;

2）求 辅助函数$L(x_1,x_2,\lambda)$的驻点，即求如下方程组（3 个方程）的解

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=0,\qquad \frac{\partial L}{\partial x_2}=0,\qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda}=0;$$

3）根据问题的实际意义，确定函数的极值点 .

上述求解步骤中的辅助函数 L常称作是这个极值问题的 Lagrange 函数，其中参数λ称为 Lagrange 乘子 .

一、梯度条件

上述求解步骤表明要求 f的约束条件极值，我们需要找 $(x_1,x_2,\lambda)\in\mathbb{R}^3$来实现 L的极值即可 . 但要正确使用 Lagrange 乘子法，需保证由 $g(x_1,x_2)=c$定义的水平集合是平面中的 C^1光滑曲线 . 根据隐函数定理，如果 $\nabla g(a,b)\neq 0$，则水平集 $g(x_1,x_2)=c$是在点(a,b)的某邻域内具有非零切向量的 C^1光滑曲线 . 因此，在求条件极值时，我们需要检验 g的临界点，若忽略梯度条件（1），该方法将失效 .

例 1 求目标函数 $f(x_1,x_2)=x_1-2x_2^2$ 在约束条件 $g(x_1,x_2)=x_1^4-{x_1}^3+x_2^2=0$下的最小值 .

解 如图 1 所示，水平曲线 $g(x_1,x_2)=0$在原点处有一个奇异点 . 在该点处， $\nabla g(0{,}0)=0$，其图像不是C^1 – 光滑曲线（含尖点）. 易知函数 $f(x_1,x_2)$的最小值为 $\mathbf{0}$，且在点 $(x_1,x_2)=(0,0)$处达到 . 但直接计算表明在该点处 Lagrange 乘子方程 $\nabla f+\lambda\nabla g=0$ 不满足，即对任意的 $\lambda\in\mathbb{R}$， $\nabla f(0,0)+\lambda\nabla g(0{,}0)=0$均不成立，这时上述常规求解步骤失效 .

另外，我们看到，若求函数 $f(x_1,x_2)$的最大值，上述常规求解步骤良好 . 因此若忽略 g的临界点，将得不到函数 f的极值或最值 . 由此也说明 Lagrange 乘子法依赖于梯度向量的几何性质 .

二、Lagrange 乘子λ的意义

我们先从几何的角度来看 Lagrange 乘子法 .

定理 2 设 $p\in A$是函数 f在约束条件 $g(x)=c$下的条件极值点，则 $\lambda=-\frac{\nabla f(p)\cdot\nabla g(p)}{|\nabla g(p)|^2}$是 $-\nabla f(p)$在外法向量$\nabla g(p)$上的投影 .

证明 根据 Lagrange 乘子定理中的梯度条件（a）及隐函数定理可知，约束集合 $A=\{x\in U|g(x)=\ c\}$在 p点附近可用

参数化曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 来表示，且满足 $\boldsymbol{r}(t_0)=\boldsymbol{p}$，$g(\boldsymbol{r}(t))=c$. 根据链式法则，$g(\boldsymbol{r}(t))$ 在 $t=t_0$ 处的全导数为 $\nabla g(\boldsymbol{r}(t_0))\cdot\boldsymbol{r}'(t_0)=0$. 另一方面，由于 t_0 是 $f(\boldsymbol{r}(t))$ 的驻点，所以

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0} f(\boldsymbol{r}(t))=\nabla f(\boldsymbol{r}(t_0))\cdot\boldsymbol{r}'(t_0)=0,$$

这样我们得到 $\nabla g(\boldsymbol{r}(t_0))$ 与 $\nabla f(\boldsymbol{r}(t_0))$ 平行 . 从而存在实数 $\boldsymbol{\lambda}$，使得 $\nabla f(\boldsymbol{p})+\lambda\nabla g(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{0}$，并且 $\lambda=-\frac{\nabla f(\boldsymbol{p})\cdot\nabla g(\boldsymbol{p})}{|\nabla g(\boldsymbol{p})|^2}$ 是 $-\nabla f(\boldsymbol{p})$ 在外法向量 $\nabla g(\boldsymbol{p})$ 上的投影 .

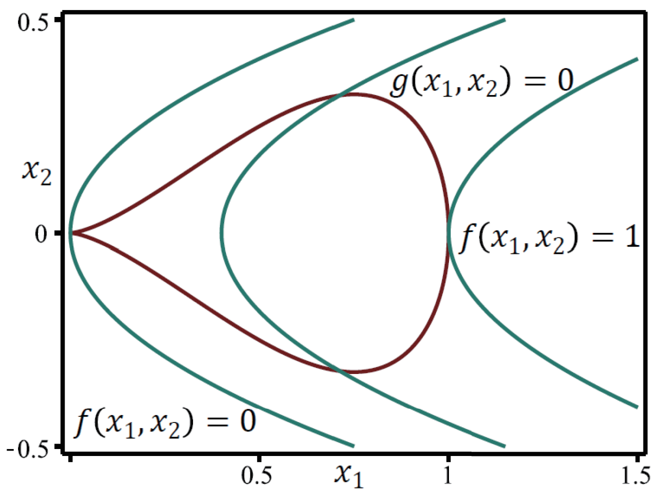

图 1

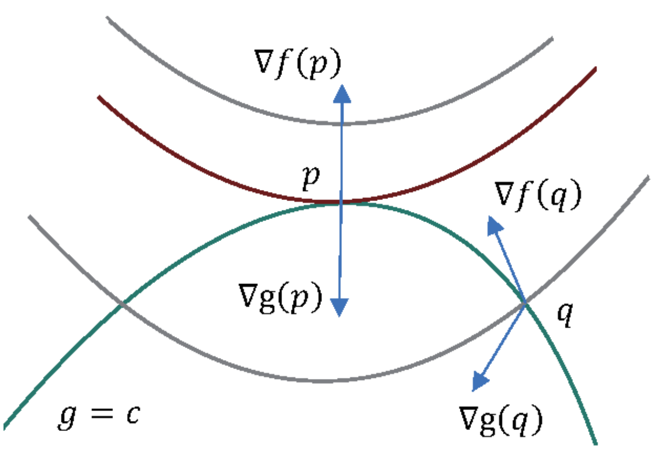

图 2

定理 2 表明在应用 Lagrange 乘子法时需要寻找与水平曲线垂直的法向量 $\nabla f(\boldsymbol{p})$，如图 4 所示 .

下面我们考虑约束优化问题

$$\max\{f(x_1,x_2)\,|\,g(x_1,x_2)=c\}.$$

由此，我们给出 Lagrange 乘子的另一种解释 .

定理 3 对给定的水平值 $\boldsymbol{c}$，记最优值点为 $\boldsymbol{p}(c)$，相应的 Lagrange 乘子、最优值分别记为 $\boldsymbol{\lambda}(c)$，$f(\boldsymbol{p}(c))$，则

$$\frac{df(\boldsymbol{p}(c))}{dc}=\lambda(c).$$

证明 由链式法则，有全导数 $\frac{df(\boldsymbol{p}(c))}{dc}=\nabla f(\boldsymbol{p}(c))\cdot\boldsymbol{p}'(c)$. 根据 Lagrange 乘子法，$\nabla f(\boldsymbol{p}(c))=\lambda(c)\nabla g(\boldsymbol{p}(c))$. 因此，我们得到

$$\frac{df(\boldsymbol{p}(c))}{dc}=\lambda(c)\nabla g(\boldsymbol{p}(c))\cdot\boldsymbol{p}'(c).$$

而

$$\nabla g(\boldsymbol{p}(c))\cdot\boldsymbol{p}'(c)=\frac{dg(\boldsymbol{p}(c))}{dc}=\frac{dc}{dc}=1.$$

这样便得到

$$\frac{df(\boldsymbol{p}(c))}{dc}=\lambda(c).$$

定理 3 表明乘子 λ（c）可看成最优值 $f(\boldsymbol{p}(c))$ 关于约束水平值 c 的变化率 .

三、结束语

在理论教学中，以上探究分析有助于培养学生分析问题、解决问题以及科研创新能力，对更好地理解和应用 Lagrange 乘子法具有重要意义。对培养学生的数学思维品质、创新意识和科学素养亦具有积极的作用。

参考文献：

[1] 同济大学数学系 . 高等数学 [M].8 版 . 北京： 高等教育出版社，2023.

[2] 华东师范大学数学系 . 数学分析 [M].5 版 . 北京： 高等教育出版社，2019.

[3] 陈纪修 於崇华 金路 . 数学分析 [M].3 版 . 北京： 高等教育出版社，2019.

资助项目：桂林电子科技大学教育教学改革项目：JGB202118。

作者简介：

[1] 陈南博， 学历 研究生， 职务职称 讲师， 研究方向 非线性分析与偏微分方程。

[2] 李玉山，学历 研究生，职务职称 系主任 / 副教授，研究方向 数学物理方程反问题 / 大学公共数学教学研究。