

基于波利亚解题理论的几何教学探索

——以一道中考试题为例

徐陈程 王煜阳 晋浩哲 杨舒倩

(苏州工学院 数学与统计学院, 江苏 苏州 215500)

摘要: 本文在波利亚解题理论的基础上, 以一道中考试题为例, 进行几何教学实践。通过“回顾反思”环节对试题深入探究, 培养学生的数学思维能力和核心素养。

关键词: 波利亚解题理论; 中考; 几何教学

引言: 在2022年义务教育数学课程标准中, 明确提出在初中阶段九大核心素养的主要表现。同时, 几何教学对于培养学生的几何直观和空间观念及其重要。几何直观有助于学生理解抽象的数学概念, 还有助于培养学生的洞察力, 促使学生深层次思考, 学生在学习中能够由点到面地看待问题。空间观念是学生应该具备的数学核心素养之一, 是发展空间想象能力的重要基础。本文利用波利亚问题解决理论探索初中几何教学研究。

几何教学可以培养不仅能培养学生的空间思维能力, 还能培养学生的逻辑思维能力和推理能力。平面几何是最能体现出思维的开放性, 其一题多解、从特殊到一般的特点能很好地锻炼学生的空间观念, 逻辑推理能力, 开拓学生的眼界, 提升学生的数学素养。

一、波利亚问题解决理论

波利亚解题理论描绘出解题理论的一个总体轮廓, 也组成了一个完整的解题教学系统。既体现常识性, 又体现由常识上升为理论的自觉努力。波利亚解题理论主要包括四个环节: 了解问题所在、制定计划、执行计划、检查并展开。这四个环节并非是单方向的, 可以任意往返, 如图1所示。

极为重要的是第四步回顾反思。但学生在解题过程中往往忽略第四步, 缺乏探究精神, 无法更深入地理解问题。基于此, 本文着重对波利亚解题理论中的第四步“回顾反思”进行探究, 即: 寻找两种及以上的解题方法; 将题目进行一般化处理。



图1

二、基于波利亚理论对几何数学问题的回顾反思

基于上述理论的研讨分析, 波利亚理论的第四步总结回顾对

于学生解决几何问题并且发展数学核心素养有着重要的作用。下面本文从一道中考几何数学题出发, 重点研究回顾与反思环节。

(2015·黑龙江省黑河市、齐齐哈尔市、大兴安岭)【8分】如图2, 在正方形ABCD和正方形CGEF中, 点B、C、G在同一条直线上, M是线段AE的中点, DM的延长线交于EF于点N, 连接FM, 易证: $DM=FM$,

$DM \perp FM$ (无需写证明过程)

(1) 如图3, 当点B、C、F在同一条直线上, DM的延长线交EG于点N, 其余条件不变, 试探究线段DM与FM有怎样的关系? 请写出猜想,

予证明;

(2) 如图4, 当点E、B、C在同一条直线上, DM的延长线交CE的延长线于点N, 其余条件不变, 探究线段DM与FM有着怎样的关系? 请直接写出猜想。

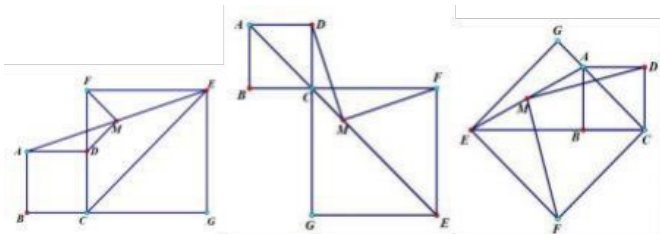


图2

图3

图4

这道中考试题的答案两小问的答案都是 $DM=FM$ 且 $DM \perp FM$, 证明过程可查, 也不是本文的研究重点, 故在此不做列举。而本文重点在于回顾整个解题过程后, 实现反思升华, 深挖蕴藏于题目背后的数学本质, 从而使学生更好地理解和掌握数学知识, 强化发现、提出、分析和解决问题的能力。

回顾与反思一: 将正方形CGEF绕点C顺时针旋转其他特殊角度, 该结论是否依然成立?

通过分析这道中考试题的三张图发现, 本题考察的图形的本质实际上是正方形CGEF在绕点C从图2的初始状态做不同角度的旋转。图3是正方形CGEF绕点C顺时针旋转了 90° , 图4是正方形CGEF绕点C顺时针旋转了 225° , 那么自然会产生这样一个疑问: 将正方形CGEF绕点C旋转至其他特殊角度, 该结论是否依然成立? 先考察正方形CGEF绕点C顺时针旋转 45° 的情形。

下面给出简要证明思路:

如图5 延长DN, 使得其与CE 交于点N, 连接DF, FN

先证明 $\triangle ADM$ 和 $\triangle MNE$ 全等, 然后利用它证明 $\triangle CDF$ 和 $\triangle NFE$ 全等, 得到 $\triangle DFN$ 是等腰直角三角形, 且M 是DN 的中点, 进而得 $FM=DM$ 且 $DM \perp FM$ 的结论。

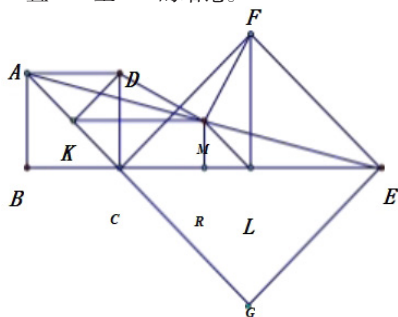


图5

回顾与反思二: 将正方形CGEF 绕点C 任意旋转, 该结论是否依然成立?

通过证明可以发现正方形CGEF 绕点C 顺时针旋转 45° 的情形, 该结论依

旧成立, 那么进一步地思考, 将正方形CGEF 绕点C 任意旋转, 该结论是否依然成立? 要证明它只需要证明当顺时针旋转角度为 α 时, 该结论依旧成立即可。如图6 取AC, CE 的中点K, L, 连接KM, DK, ML, FL, 再做 $MR \perp CE$ 。先证明四边形KMLC 是平行四边形, 接着应用平行四边形KMLC 的性质来证明 $\triangle DMK$ 和 $\triangle MLF$ 全等, 从而得到 $DM=MF$ 。再利用 $\triangle DMK$ 和 $\triangle MLF$ 全等进行角的等量转化以及 $MR \perp CE$, 得到 $DMF=90^\circ$, 从而证明 $DM \perp MF$ 。

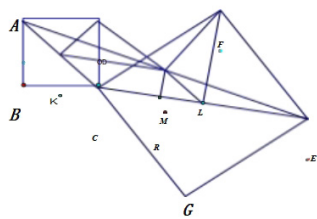


图6

回顾与反思三: 点M 的轨迹是什么?

在任意旋转正方形CGEF 的过程中, 注意到点M 似乎在某个轨迹上运动。那么能否证明呢?

预设点M 轨迹是圆。证明过程如下所示:

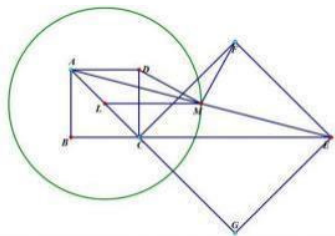


图7

如图7 取AC 中点L, 连接LM $\because$ L, M 分别是AC, AE 中点

$\therefore$ LM 是 $\triangle ACE$ 的中位线

$\therefore LM=1/2 CE$

在大正方形旋转过程中, L 点为定点, M 点为动点, LM 长度因CE 长度不变而不变,

因此, M 是在以L 为圆心, LM 为半径的圆上。

三、几点反思

(一) 引导学生理解运用波利亚“怎样解题”表

“怎样解题”表的4 个步骤和程序组成了一个完善的解题教学程序, 当学生按照波利亚“怎样解题”表进行解体时, 能打开学生思路, 让学生有所启发, 愿意继续思考下去, 这样很多问题都能迎刃而解。同时也可纠正学生遇到不熟悉或者难题时就不认真分析思考, 盲目推理的坏习惯。最终培养了学生独立解体的能力, 提高学生的数学思维能力。我们要加深学生对“怎样解题”表的理解和运用。

(二) 加强学生的问题回顾与反思意识

问题回顾与反思是学好数学的本质环节, 然后现如今的中学生大多浮于表面, 草草做完题目, 没有深入思考是否能用不同的方法求解, 是否能改成变式。我们要引领学生深入思考问题, 挖掘题目背后的内涵, 从而让学生自我启发, 总结经验, 培养学生对数学的浓厚兴趣, 最终更好地提高学生的基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验, 以及发现问题、提出问题、分析问题、解决问题的能力, 并提高学生的推理意识和创新能力。

参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部定制. 义务教育数学课程标准(2022 年版)
- [2] 崔春红. 初中数学教学中几何直观能力培养探析[J]. 数理化解题研究, 2024,(29):11-13.
- [3] 张露. 初中生数学空间观念情境性测评研究[D]. 江南大学, 2023.
- [4] 李香, 杨新芳, 杨斐. 试论在初中数学几何教学中培养“学生空间思维能力”的策略[J]. 中国多媒体与网络教学学报(下旬刊), 2023,(08):80-83.
- [5] 严萍. 初中几何教学中培养学生逻辑思维能力的策略[J]. 数理化解题研究, 2022,(05):26-28.
- [6] 黄辉煌. 图形与几何教学中培养学生推理能力的策略[J]. 数学学习与研究, 2021,(09):47-48.
- [7] 袁素梅. 平面几何教学中培养学生能力的几个策略[J]. 中学数学研究(华南师范大学版), 2013,(18):22-24.
- [8] 张奠宙, 宋乃庆. 数学教育概论[M]. 高等教育出版社, 2016.