探析函数解析式的求法

代　爽
重庆师范大学　重庆市　401331

摘　要：函数是数学领域重要的基础概念之一，是中学数学中重要的教学内容，也是中学数学考察的重点.研究函数问题离不开研究函数解析式，函数解析式的求法在中学数学中是一大难点，并且在近几年中高考数学试题中层出不穷，也是高考的重要考点之一，其求法不仅综合了代数和几何的相关知识，体现了数学思想方法，更能很好地考查学生的能力[1].

关键词：函数；解析式；中学数学

Analysis of the analytic formula of functions

Shuang Dai
Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China

Abstract: The function is one of the important basic concepts in mathematics, is an important teaching content in middle school mathematics, and is also the focus of middle school mathematics investigation. Analytical research function problem depends on the function, the function of analytic calculation methods in middle school mathematics is a difficulty, and in recent years, it is also one of the important examination points of the college entrance examination. The method not only combined the relevant knowledge of algebra and geometry, and embodies the mathematical thinking method, but more can also test students' ability.[1]

Keywords: function; Analytic expression; Middle school mathematics

求解函数解析式不仅是考试中最基本的题型，而且是高考重点考查的内容之一，在求解的过程中往往还蕴含着一些数学思想方法和解题技巧，因此需引起教师与学生的重视.在学习过程中应对函数的各种类型有基本的认识，对函数的定义和性质有深刻地理解，只有这样才能够进一步地对求解函数解析式的多种方法有所掌握并形成能力.因此，为更好地了解和掌握这类问题的解法，本文将对解析式的求法作一归纳.

（一）待定系数法

例1　已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(2)=-1, f(-1)=-1,$ 且 $f(x)$ 的最大值是8，试确定此二次函数.

解　由题意设二次函数为 $y=a(x-2)(x+1)-1,$

则有 $y=a(x-\frac{1}{2})-\frac{9}{4}a-1,$

又因为 $f(x)$ 的最大值是8，则 $-\frac{9}{4}a-1=8,$ 得 $a=-4,$ 因此二次函数的解析式为 $y=-4x^2+4x+7.$

点评：若题中已明确给出可以确定二次函数解析式的条件，那么要求出待定系数就可以采用一般式 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 、顶点式 $y=a(x-m)^2+n$ 和双根式 $y=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0)$ 等模型.

（二）换元法

例2　已知 $f(x)$ 满足关系 $f(\frac{2}{x}+1)=\lg x, x>0$ ，求 $f(x)$ 的解析式.

解　令 $\frac{2}{x}+1=u$ ，由 $x>0$ 知 $u>1$ ，则解得 $x=\frac{2}{u-1}$ ，因此 $f(u)=\lg\frac{2}{u-1}=\lg 2-\lg(u-1),\ u>1,$ 即 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=\lg\frac{2}{x-1}=\lg 2-\lg(x-1),\ x>1.$

点评：当已知条件为复合函数的解析式，要求 $f(x)$ 的解析式时，此时换元法就适用.

（三）配凑法

例3　函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$ ，求 $f(x)$ 的解析式.[2]

解　因为 $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2,$

ISSN: 2661-4987(Print); 2661-4995(Online)

令 $u=x+\frac{1}{x}$，得 $f(u)=u^2-2$，又由 $\left|x+\frac{1}{x}\right|\ge 2$，

所以 $f(x)=x^2-2,|x|\ge 2$，

因此函数的解析式为 $f(x)=x^2-2,|x|\ge 2.$

点评：配凑法即是给等式左右两边同时加上或减去一个式子或是对分子、分母同时乘以一个不为零的式子.有目的地构造出一个式子，从而使要求解的式子能以某种特定的形式出现，或具有某种特性，使问题向特定的方向转化，最终使问题得到解决.

（四）赋值法

例4 已知对任意 $x,y\in R$，关系式 $f(x-y)=f(x)-(2x-y+1)y$ 都成立，且 $f(0)=1$，求 $f(x)$ 的解析式.

解 由于 $f(x-y)=f(x)-(2x-y+1)y$ 对一切 x,y 都成立，于是令 $x=0$，得 $f(-y)=f(0)-(1-y)y$，

因为 $f(0)=1$，所以 $f(-y)=y^2-y+1$，

再令 $x=-y$，得 $f(x)=x^2+x+1$，

即函数的解析式为 $f(x)=x^2+x+1.$

点评：赋值法就是对变量用特殊值代入进行求解.对于没有明确给出具体表达式的抽象函数来说，赋值法行之有效.

（五）定义法

例5 设 $f(x+2)=2^{x^2+4x}-x$，求 $f(x-2)$ 的解析式.

解 由于 $f(x+2)=2^{x^2+4x}-x=2^{(x+2)^2-4}-(x+2)+2$，

则令 $x=x+2$，有 $f(x)=2^{x^2-4}-x+2$，

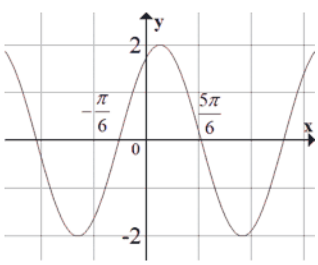
再令 $x-2=x$，所以函数 $f(x-2)$ 解析式为

$f(x-2)=2^{x^2-4x}-x+4.$

点评：定义法通过字面意思理解就是使用某些数学定义求解.就函数而言，其基础包括定义域和对应法则等.在使用定义法时，必须要认真观察解析式的特点，然后根据定义进行求解，关键还是在于理解函数的定义.

（六）图像法

例6 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+b(A,\ \omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的图像如图所示，求 $f(x)$ 的解析式.



解 由图知 $A=2,\frac{T}{2}=\frac{5\pi}{6}-(-\frac{\pi}{6})$，所以 $T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，所以 $\omega=2,b=0$，则可求出 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$，将点 $(-\frac{\pi}{6},0)$ 代入 $f(x)$，得 $0=2\sin[2(-\frac{\pi}{6})+\varphi]$，所以 $\sin(-\frac{\pi}{3}+\varphi)=0$，则 $-\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi$，且 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，

因此所求函数的解析式为 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3}).$

点评：使用图像法求解的函数解析式，须由题中给出的已知条件，知晓函数的图像，从图像中找出隐含的各种信息，再利用函数的性质推出函数解析式.

（七）解方程组法

例7 已知函数 $f(x)$ 满足 $2f(x)+f(\frac{1}{x})=3x(x>0)$，求 $f(x)$ 的解析式.

解 由于 $2f(x)+f(\frac{1}{x})=3x(x>0)$，

以 $\frac{1}{x}$ 代替 x，得 $2f(\frac{1}{x})+f(x)=\frac{3}{x}$，

所以解方程组 $\begin{cases}2f(x)+f(\frac{1}{x})=3x\\ f(x)+2f(\frac{1}{x})=\frac{3}{x}\end{cases}$，

得 $f(x)=2x-\frac{1}{x}(x>0)$.因此函数 $f(x)$ 的解析式为

$f(x)=2x-\frac{1}{x}(x>0).$

点评：当解含有 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 或 $f(x)$ 与 $f(\frac{1}{x})$ 的函数时，通常将关于 x 的代数式都看成已知量，再运用赋值法构造出第二个方程，与原方程组成方程组解之.

（八）构造数列法

例8 已知 $f(1)=1,f(x+1)=3f(x)+2(x\in N_+)$，求 $f(x)$ 的解析式.[3]

解 因为 $f(1)=1$ 且 $f(x+1)=3f(x)+2$，

所以 $f(x+1)+1=3[f(x)+1]$，

变形得 $\frac{f(x+1)+1}{f(x)+1}=3$，

即数列 $\{f(x)+1\}$ 是一个等比数列，且这个数列的首项为2，公比为3，即所求函数解析式为 $f(x)=2\cdot 3^{x-1}-1.$

点评：若题干中给出的关系式是含有 $f(x)$ 与 $f(x+1)$ 的函数，通过分析判断对题中所给条件做一些简单的变换就可以构造出一个恰当的数列，从而解析式得以求出.

（九）反函数法

例9 已知函数 $y=f(x)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$，求函数 $y=2+3f(2+x)$ 的反函数的解析式.[4]

解 因为 $y=2+3f(2+x)$，

变形得 $f(2+x)=\frac{y-2}{3}$，

ISSN: 2661-4987(Print); 2661-4995(Online)

即 $2+x=f^{-1}(\frac{y-2}{3})$,

也即 $x=f^{-1}(\frac{y-2}{3})-2$,

因此所求函数的反函数为 $y=f^{-1}(\frac{x-2}{3})-2$.

点评：反函数法即通过反函数的定义求出解析式.如果在求解时对函数的定义域、值域有要求，那么应先求出原函数的定义域和值域，其次可将已知函数 $y=f(x)$ 看成关于 x 的方程，将 y 看成常数，在其定义域上解出方程得 $x=f^{-1}(y)$，最后将 x 与 y 互换，即求得反函数 $y=f^{-1}(x)$.

（十）递推法

例10 设 $f(x)$ 是定义在正整数集上的函数，且 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)+x_1x_2$，$f(1)=1,(x_1,x_2\in N_+)$，求 $f(x)$ 的解析式.

解 由 $f(1)=1$，有 $f(x+1)=f(x)+x+1$,

即 $f(x+1)-f(x)=x+1$,

所以有 $f(2)-f(1)=1+1=2$,

$f(3)-f(2)=2+1=3$,

……

$f(x)-f(x-1)=x$,

将以上各式相加得 $f(x)-f(1)=2+3+4+\cdots+x$,

因此 $f(x)=1+2+3+\cdots+x=\frac{1}{2}x(x+1)$,

即 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=\frac{1}{2}x(x+1)(x\in N_+)$.

点评：递推法即构造递推关系进行解题.若 $f(x)$ 是定义在正整数集上的函数，且题中所给条件或是该条件经过变形后含有递推关系，则可由递推关系得出一系列关系式，再通过累加或累乘等运算求得函数解析式.构造出递推关系是采用递推法解题的一个关键步骤，递推关系则通过归纳、猜想等方法获得.

（十一）求导法

例11 已知 $x=-1,x=2$ 是关于 x 的三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2-a^2x(a>0)$ 的两个极值点，求 $f(x)$ 的解析式.

解 因为 $x=-1,x=2$ 是函数 $f(x)=ax^3+bx^2-a^2x$ 的极值点，所以 $f'(-1)=0,f'(2)=0$,

即 $\begin{cases}f'(-1)=3a-2b-a^2=0\\f'(2)=12a+4b-a^2=0\end{cases}$,

解方程组得 $\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=6\\b=-9\end{cases}$,

因为 $\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$ 不符合题设条件，所以 $\begin{cases}a=6\\b=-9\end{cases}$,

因此函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=6x^3-9x^2-36x$.

点评：求导法即对所给函数进行求导，再合理使用已知条件求待定系数.若题中含有与导数相关的信息，如极值点、驻点、斜率、切线等，则一般采用求导法对所给函数进行求导运算，从而求得解析式.导数法在研究含参函数的单调性、极值等方面也起着重要的作用.

（十二）参数方程法

例12 已知 $f(\sin x-1)=\cos^2 x+2$，求 $f(x)$ 的解析式.[5]

解 设所求函数 $y=f(x)$ 的参数方程为

$\begin{cases}x=\sin t-1\\y=\cos^2 t+2\end{cases}$,

由参数方程得 $\begin{cases}(x+1)^2=\sin^2 t\\y-2=\cos^2 t\end{cases}$,

则 $(x+1)^2+y-2=1$,又有 $-1\le\sin x\le1$，得 $-2\le x\le 0$，所以函数的解析式为 $f(x)=-x^2-2x+2$.

点评：参数方程法就是将普通方程化为参数方程求解，目的就是为了引入参数而产生新的关系式.先选定合适的参数 t 用以确定关系 $x=f(t)$ 或 $y=g(t)$，再代入普通方程 $F(x,y)=0$，求得另一关系 $y=g(t)$（或 $x=f(t)$）.在求解有关三角函数的某个解析式时，通常将参数方程设为与 $\sin^2 t$ 和 $\cos^2 t$ 有关的式子，最后再利用三角函数公式 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 求得解析式.

参考文献：

[1] 黄玉华.例析中考函数解析式的求法[J].数理化学习，2010,（03）：27-30.

[2]程泽兵.例谈函数解析式求解的类型与方法[J].中学数学研究，2009（12）：30-32.

[3]马俠.函数解析式的求法[J].中国科技信息，2010,（05）：35-37.

[4]屠海权.求反函数时需要弄清楚的几个问题[J].甘肃教育，2008,（19）：63.

[5]黄俊.例谈函数解析式的几种求法[J].铜仁师范高等专科学校学报（综合版），2003,（S1）：115-116.