浅谈对函数连续性的理解

黄登香　刘霖　姚程宇

摘要：函数的连续性是函数特有的性质，是高等数学中微积分学模块重要的基础内容，只有掌握函数连续性的定义，才能更好地理解连续函数的性质、函数的极值与最值、函数极限的运算等内容.本文从函数连续性的定义出发，分析如何利用定义来分析函数的连续性，并结合例题分析，强化对函数连续性定义的理解.

关键词：函数的连续性改变量；函数的极限

1. 引言

我们对于连续的最直观感受，就是一种连绵不断的状态，如河水流动过程、小鸟的飞行轨迹等都是连续的.函数的连续性是高等数学课程中微积分学模块的基础性概念，强化对函数连续性的理解，对函数极限的运算、导数等内容的学习有着重要的作用.下面，笔者从几个角度出发，通过有关例题分析，来谈谈对函数连续性的理解.

2. 连续函数的定义

动物的生长发育过程、气温的变化过程、物体的运动过程等这些活动都蕴藏着连续性.比如复兴号高速列车的运行轨迹，就是一个连续的过程.在高速列车运行过程中，当时间有微小的变动时，高速列车的运行路程也只发生了微小的变化，这就是连续性所具有的特征.因此，对函数连续性的概念，可以从高速列车的运行路程变化来引入.当高速列车的运行时间，即自变量 t 有一个微小的改变量△t 时，对应的运行路程，即因变量 S 也只发生了微小的改变量△S.也就是说，对高速列车的运行路程这样的连续性现象而言，当△t→0 时，有△S→0.因此，为便于理解，先给出函数$f(x)$在某个点 X_0处连续的定义如下：

2.1 函数$f(x)$在某个点 X_0处连续的定义

定义 1 假设函数$f(x)$在点 X_0的某个邻域内有定义，如果自变量 X 在 X_0处的改变量△X→0 时，相应的函数改变量△y→0,则称函数$f(x)$在点 X_0处连续[1].

用极限语言来描述函数的连续性，即若函数$f(x)$在点 X_0处满足

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

则称函数$f(x)$在点 X_0处连续.

若令 X_0+△X=X，此时，△X→0 等价于 X→X_0，上述表达式可以表达为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0$$

即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

因此，函数$f(x)$在点 X_0处连续的等价定义如下：

定义 2 假设函数$f(x)$在点 X_0的某个邻域内有定义，若有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

则称函数$f(x)$在点 X_0处连续[1].

若函数$f(x)$在点 X_0处的左极限等于函数值，即 $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，称函数$f(x)$在点 X_0处左连续；若函数$f(x)$在点 X_0处的右极限等于函数值，即 $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，称函数$f(x)$在点 X_0处右连续.

2.2 函数$f(x)$在区间内连续的定义

如果函数$f(x)$在某个开区间(a,b)内任意点处均连续，则称函数$f(x)$在该开区间(a,b)内是连续的[1].如果函数$f(x)$在某个开区间(a,b)内任意点处均连续，并且在 x=a 处右连续，在 x=b 左连续，则称函数在该闭区间[a,b]内是连续的[1].

若函数$f(x)$在点 X_0处不连续,则称点 X_0为函数的不连续点或间断点[1].

3.函数的连续性例题分析

3.1 利用定义 1 讨论函数在某点 X_0处的连续性

根据定义 1，在讨论函数$y=f(x)$在点 X_0处连续性时，只需分析函数$f(x)$在 X_0处相应的改变量Δx和Δy是否满足$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.若$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$成立，则函数$f(x)$在点 X_0处连续.否则，函数$f(x)$在点 X_0处间断.因此，依据定义 1 讨论函数在某点 X_0处的连续性步骤如下：

（1）计算函数　　在　　处的改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；

（2）计算极限$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y$，若$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，则函数$y=f(x)$在 X_0处连续，否则不连续.

例 1 用定义 1 证明函数$y=x^2+2x-1$在其定义域内任意点 X_0处连续.

解：因为$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

$$=[(x_0+\Delta x)^2+2(x_0+\Delta x)-1]-({x_0}^2+2x_0-1)$$

$$=\Delta x^2+(2x_0+2)\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x^2+(2x_0+2)\Delta x=0$$

所以，函数$y=x^2+2x-1$在其定义域内任意点 X_0处连续.

3.2 利用定义 2 讨论函数在某点 X_0处的连续性

根据定义 2，容易知道，函数$f(x)$在点 X_0处连续蕴含着 3

个条件：

1.函数$f(x)$在点 X₀处有定义，即$f(x_0)$存在；

2.函数$f(x)$在点 X₀处的极限$\lim_{x\to x_0} f(x)$存在；

3.极限$\lim_{x\to x_0} f(x)$等于函数值$f(x_0)$

当 3 个条件同时满足时，函数$f(x)$在点 X₀处连续.否则，函数$f(x)$在点 X₀处间断.下面给出具体的解题步骤：

(1)判断函数$f(x)$在点 X₀处定义情况.若在点 X₀处没有定义，则函数$f(x)$在点 X₀处不连续；若有定义，进入第二个步骤.

(2)计算函数$f(x)$在点 X₀处的极限$\lim_{x\to x_0} f(x)$.若$\lim_{x\to x_0} f(x)$不存在，则函数在点 X₀

处间断；若$\lim_{x\to x_0} f(x)$存在且有限，进入第三个步骤.

(3)计算函数$f(x)$在点 X₀处的函数值$f(x_0)$，判断$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$是否成立.若成立，则函数$f(x)$在点 X₀处连续；若式子不成立，则函数$f(x)$在点 X₀处不连续.

例 2 考察函数$f(x)=\frac{1}{2x-1}$在点$x=\frac{1}{2}$处是否连续.

解：因为函数$f(x)=\frac{1}{2x-1}$在$x=\frac{1}{2}$处无定义，所以函数$f(x)$在点$x=\frac{1}{2}$处不连续.

显然，函数$f(x)=\frac{1}{2x-1}$是初等函数，在除$x=\frac{1}{2}$以外的任意点处，即定义域上是连续的，函数图像如图 1.

例 3 讨论函数$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<0 \\ x+2, & x\geq 0 \end{cases}$在点 X=0 处的连续性.

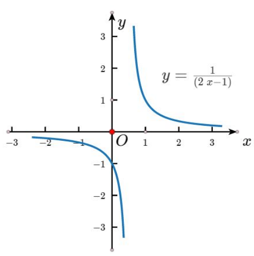
解：显然，函数$f(x)$在 X=0 处有定义；

因为 $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^2+1)=1$;

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+2)=2$;

由$\lim_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$，即$\lim_{x\to 0} f(x)$不存在.

所以，函数$f(x)$在点 X=0 处不连续.



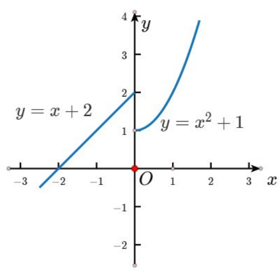


图 1 函数$f(x)=\frac{1}{2x-1}$的图像.图 2 函数$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<0 \\ x+2, & x\geq 0 \end{cases}$的图像.

例 4 讨论函数$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1}, & x\neq -1 \\ -1, & x=-1 \end{cases}$在点 X=−1 处的连续性.

解：显然，函数$f(x)$在 X=−1 处有定义；又

$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x-1)=-2$；$f(-1)=-1$，因此，$\lim_{x\to -1} f(x)\neq f(-1)$.故函数$f(x)$在点 X=−1 处不连续.

该例题在考察$\lim_{x\to -1} f(x)$是否存在时，因为函数$f(x)$在 X=−1 的左右两边表达式相同，所以直接计算$\lim_{x\to -1} f(x)$即可.函数$f(x)$满足连续性条件(1)和(2)，但不满足条件(3)，因此在点 X=−1 处不连续.

上面的 3 个例题说明，函数连续的 3 个条件只要有一个不满足，函数在点 X₀处不连续.下面的例子说明 3 个条件同时满足时，函数在点 X₀处连续.

例5 讨论函数$f(x)=\begin{cases} e^x+1, & x<0, \\ 2, & x=0, \\ 2+\ln(1+x), & x>0. \end{cases}$的连续性.

解：显然，函数$f(x)$在区间$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上处处连续，现在只需讨论函数$f(x)$在 X=0 处的连续性，因为

(1)函数$f(x)$在 X=0 处有定义；

(2) $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(e^x+1)=2$；$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(2+\ln(1+x))=2$；

即$\lim_{x\to 0} f(x)=2$.

(3) $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=2$.

所以，函数$f(x)$在 X=0 处的连续.因此，$f(x)$在其定义域 R 上连续.

4. 结语

研究函数的连续性，对学习函数的间断点分类、连续函数的性质、函数的最值等知识有重要作用.本文从函数连续性的定义出发，分析函数的连续性条件，并通过例题巩固知识点，从易到难，有效提高初学者在学习函数的连续性时的学习效果.

参考文献：

[1]崔信.高等数学[M].北京：北京出版社，2021.

[2] 顾静相.经济数学[M].北京：高等教育出版社，2019.

[3]文利霞.例谈数形结合思想在高等数学教学中的应用[J].《西部素质教育期刊》,2018,4(16),162−163.