

求解频率动态轨迹约束优化问题的高效积分方法

赖梁杰

广西民族大学 物理与电子信息学院 广西南宁 540006

摘要: 随着可再生能源在电源中的占比持续上升,系统频率响应不足的问题日益凸显。作者所在课题组已经构建了一种频率动态轨迹约束的最优潮流数学模型框架,实现系统调频资源的协调优化配置。为更有效地求解该优化问题,本文利用改良的四阶3步Adams法和广义后向差分方法两种数值积分方法,对模型中的微分方程约束进行差分化,提高模型求解的精度和效率。通过比较不同积分方法在求解效率和求解精度等方面的结果,表明差分化方法的改进对提高优化问题求解效率的有效性,进而为电力系统频率稳定性研究提供更为高效的解决方案。

关键词: 差分化; Kron 缩减; 微分方程; 频率稳定; 最优潮流

引言

在新型电力系统中,维持系统频率稳定是电力系统安全运行的核心^[1]。随着电网规模的迅速扩大以及可再生能源的大规模并网,电网的动态行为变得更为复杂。文献^[2]提出一种动态频率稳定约束最优潮流问题模型,旨在保证一次调频过程中的频率稳定。该模型的一个显著特点是包含微分方程约束,该组微分方程用于描述每台发电机的频率和机械功率的暂态变化。从数学上来说,该优化问题与暂态稳定约束优化问题类似,同属于动态优化范畴,对于此类问题,通常利用数值积分方法对微分方程进行差分化,将含有微分方程约束的非线性优化问题转为了非线性约束优化问题。隐式梯形积分法因其广泛的适用性和稳定性,常用于暂态稳定问题的商业化分析软件^[3]。然而,隐式梯形积分方法不能完全满足电力系统动态分析对高效性的需求,为高效求解DFS-OPF问题,利用高精度的数值积分方法对微分方程约束进行差分化显得尤为必要。

本文关注两种新兴的积分方法——改进的3步Adams法^[4]和广义后向差分公式^[5]。改进的3步Adams法是一种基于显式多步法的改良算法,通过增加校正项和优化系数,显著提升算法在较大步长下的计算精确度和稳定性。相较于传统的Adams显式方法,改进的3步Adams法在计算速度与精确度之间取得了较好的平衡,特别适合于动态系统的分析。而GBDF法则是一种隐式多步法,它具备强大的数值稳定性和处理刚性问题的能力。通过构建高阶的后向差分公式,GBDF在参数变化范围广和非线性特性显著的动态系统

中表现出色。尤其在处理复杂的电力系统动态稳定问题时,GBDF能够有效减少计算误差并增强算法的鲁棒性。

为提高DFS-OPF优化问题的求解效率,本文分别利用改进的3步Adams法和GBDF法对DFS-OPF模型中的微分方程进行差分化,并通过巧妙地结合Kron缩减技术,对导纳矩阵进行规模缩减,显著降低扰动后功率平衡方程的规模,进而减少优化问题的等式约束数量^[6]。

1.DFS-OPF模型中的微分方程约束

文献^[5]提出的DFS-OPF模型,旨在尽可能少地改变系统在扰动前的运行方式,来满足动态频率稳定要求。该优化问题的目标函数是再调度成本最小,约束条件包括扰动前节点功率平衡方程、扰动前设备及运行约束、同步发电机频率响应方程、扰动后节点功率平衡方程、频率最低点约束等。其中,同步发电机频率响应方程包括摇摆方程、调速器响应方程和初值方程,摇摆方程和调速器响应方程中则含有微分方程。

摇摆方程的表达式如下:

$$\dot{\delta}_i = \omega_i - \omega_{ref} \quad i = 1, \dots, m \quad (1)$$

$$\dot{\omega}_i = \frac{\omega_{ref}}{2H_i} (P_{m,i} - P_{e,i}) \quad i = 1, \dots, m \quad (2)$$

其中, i 表示发电机接入节点序号, m 表示发电机台数, δ_i 、 ω_i 分别表示接入节点 i 的发电机的功角和角速度同时, ω_{ref} 表示发电机的额定角速度, H_i 表示接入节点的发电机的惯性时间常量, $P_{m,i}$ 表示接入节点的发电机机械功率, $P_{e,i}$ 表示接入节点的发电机的电磁功率。

对于发电机的经典模型,通常假设发电机暂态电抗后

的电势保持恒定，继而发电机的电磁功率 $P_{e,i}$ 可表示为：

$$P_{e,i} = \frac{E_i V_i \sin(\delta_i - \theta_i)}{X'_{d,i}} \quad (3)$$

其中， E_i 表示发电机的电势。

由于发电机的调速响应在一次频率中起着至关重要的作用，因此系统频率响应模型必须充分考虑轮机调速器的动态特性。下面以再热蒸汽轮机为例，利用一组微分代数方程描述其动态行为。再热蒸汽轮机的动态特性可表示为：

$$\frac{dZ_{g1,i}}{dt} = \frac{1}{T_{1,G}} (K_{G,i}(\omega_i - \omega_{ref}) - Z_{g1,i}) \quad i \in (1, m) \quad (4)$$

$$\frac{dZ_{g2,i}}{dt} = \frac{1}{T_{3,G}} (P_{OUT,i} - Z_{g2,i}) \quad i \in (1, m) \quad (5)$$

$$\frac{dZ_{g3,i}}{dt} = \frac{1}{T_{5,G}} (Z_{g2,i} - Z_{g3,i}) \quad i \in (1, m) \quad (6)$$

$$P_{OUT,i} = P_{m0,i} - \frac{K_{G,i} I_{3,G}}{T_{1,G}} (\omega_i - \omega_{ref}) - Z_{g1,i} (1 - \frac{I_{3,G}}{T_{1,G}}) \quad i \in (1, m) \quad (7)$$

$$P_{m,i} = (1 - F_G) Z_{g3,i} + F_G Z_{g2,i} \quad i \in (1, m) \quad (8)$$

其中， $Z_{g1,i}$ 、 $Z_{g2,i}$ 、 $Z_{g3,i}$ 表示中间微分变量， $T_{1,G}$ 、 $T_{3,G}$ 、 $T_{5,G}$ 表示轮机调速器的时间常数， $P_{OUT,i}$ 是中间功率变量， $P_{m0,i}$ 表示额定机械功率， F_G 表示分配系数。

2. 微分代数方程约束的差分方法

2.1 改进的 3 步隐式 Adams 积分方法

改进的 3 步 4 阶 Adams 积分公式的计算格式如下：

$$3x_n + 8x_{n+1} - 24x_{n+2} + 19x_{n+3} = \frac{h}{24} (51f_n - 103f_{n+1} + 281f_{n+2} + 179f_{n+3}) \quad (9)$$

式 (9) 的局部截断误差主要系数为 -0.03457 ，稳定范围为 $(-5.0625, 0)$ 。改进的 3 步 4 阶隐式 Adams 方法相较于传统方法拥有更宽的稳定区间，算法在精确度上实现了显著的提升，因此它更适合用于求解大规模微分代数方程。多步法的一个固有缺陷是无法独立启动。为了解决这一问题，本文采用四阶龙格-库塔法来完成前两步的计算。

2.2 广义向后差分积分方法 (GBDF)

基于均匀网格 s 级的 GBDF 方法可以描述为：

$$hf_n = \sum_{j=-v}^{s-v} \alpha_{j+v} x_{n+j} \quad (s \geq 1, n \in (v, N-s+v)) \quad (10)$$

式 (10) 各变量表示如下：

$$f_n \equiv f(t_n), h = t_{n+1} - t_n, x_{n+j} \equiv x(t = t_n + j \times h)$$

$$v = \begin{cases} \frac{s+2}{2} & (s \text{ 为偶数}) \\ \frac{s+1}{2} & (s \text{ 为奇数}) \end{cases} \quad (11)$$

当 $s=4$ 时，4 阶 GBDF 方法的计算格式为：

$$hf_n = -\frac{1}{12} x_{n-3} + \frac{1}{2} x_{n-2} - \frac{3}{2} x_{n-1} + \frac{5}{6} x_n + \frac{1}{4} x_{n+1}$$

$$(n \in (3, N-1)) \quad (12)$$

对于 GBDF 方法，我们需借助附加方法来形成 $s-1$ 个额外方程，GBDF 的反射方法和与之同阶的传统后向差分法均可作为附加手段。

下式即为 4 阶 GBDF 方法的附加策略：

$$hf_n = -\frac{1}{4} x_{n-1} - \frac{5}{6} x_n + \frac{3}{2} x_{n+1} - \frac{1}{2} x_{n+2} + \frac{1}{12} x_{n+3}$$

$$(n \in (1,2)) \quad (13)$$

$$hf_N = -\frac{1}{4} x_{N-4} - \frac{4}{3} x_{N-3} + 3x_{N-2} - 4x_{N-1} + \frac{25}{12} x_N \quad (14)$$

相较于传统的 BDF 方法， s 级的 GBDF 方法在数值分析领域显示出了其特有的优势。该方法不仅承袭了传统 BDF 方法的核心属性——A-稳定性，确保具有负实部特征值的线性系统的数值解保持稳定，而且还具备更为严格的 L-稳定性，使得 s 级的 GBDF 方法能够更快地收敛至真实解，因此，在传统意义上， s 级的 GBDF 方法更为可靠和高效，并且更适合处理 DFS-OPF 优化问题中的微分代数方程约束。

3. DFS-OPF 优化模型的简化

为提高 DFS-OPF 优化问题的计算效率，采用 Kron 缩减技术，降低该优化模型的约束规模。仅保留与发电机直接相连的节点，降低导纳矩阵的阶数。

首先，利用负荷节点的功率计算出等效阻抗，并将其计入导纳矩阵，具体如下：

$$S = P + jQ \quad (15)$$

$$Z_{load} = \frac{V^2}{S} \quad (16)$$

$$Y_{load} = \frac{1}{Z_{load}} \quad (17)$$

类似地，采用上面的方法处理扰动功率，将扰动功率的影响在导纳矩阵中体现。

将导纳矩阵按发电机节点和其他节点进行分块，得到如下矩阵：

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{GG} & Y_{GL} \\ Y_{LG} & Y_{LL} \end{bmatrix} \quad (18)$$

其中， Y_{GG} 表示发电机节点的自导纳， Y_{LL} 表示除发电机节点之外节点的自导纳， Y_{GL} 和 Y_{LG} 则表示发电机节点与其余节点之间的互导纳。

发电机暂态电抗组成的方阵如下式所示：

$$Y_G = \begin{bmatrix} \frac{1}{jX'_{di}} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{jX'_{di}} \end{bmatrix} \quad (19)$$

于是，得到增广导纳矩阵

$$Y_N = \begin{bmatrix} Y_G & -Y_G & 0 \\ -Y_G & Y_G + Y_{GG} & Y_{GL} \\ 0 & Y_{LG} & Y_{LL} \end{bmatrix} \quad (20)$$

利用 Kron 技术，可以得到简化后的导纳矩阵：

$$Y_r = Y_G - [-Y_G \ 0] \begin{bmatrix} Y_G + Y_{GG} & Y_{GL} \\ Y_{LG} & Y_{LL} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -Y_G \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

是仅包含发电机节点的导纳矩阵，由此可见，等式约束的规模大幅度减小，有助于进一步缩短优化问题的求解时间，减轻 CPU 的计算负担。

4. 仿真计算分析

本节中，我们将比较改进的三步隐式 Adams 方法、GBDF 方法和隐式梯形三种积分方法对 DFS-OPF 优化问题求解效率的影响，通过对 WSCC 3 机 9 节点系统进行仿真计算，验证所提出的先进积分方法和缩减技术的有效性。本文针对 WSCC 3 机 9 节点系统进行仿真计算，借助 IPOPT 求解器求解非线性优化问题。假设在 5 号节点处发生风机脱网，导致系统损失 33 MW 的功率，频率稳定下限设为。

图 1 给出应用三种积分方法得到的系统平均频率变化曲线，其中，隐式梯形积分方法（以下简称经典方法）的步长为 0.01s，另外两种先进积分方法的步长为 0.04s。由图可知，与小步长下的经典方法相比，较大时间步长的先进积分方法得到的频率曲线差异很小，表明先进积分方法差分化时可以取较大的积分步长，对优化结果的准确性影响很小。为进一步验证新积分方法取大步长时的数值稳定性，比较新积分方法取 0.06s 步长时和经典法取 0.01s 时的系统频率曲线，如图 2 所示。可以看出，当步长设为 0.06s 时，改进的四阶三步 Adams 法相较于步长为 0.04s 时曲线波动幅度更大，数值稳定性降低。而四级 GBDF 方法即便在更大步长下，其频率曲线的波动幅度仍然低于小步长的经典方法，说明四级 GBDF 方法的数值稳定性更好。

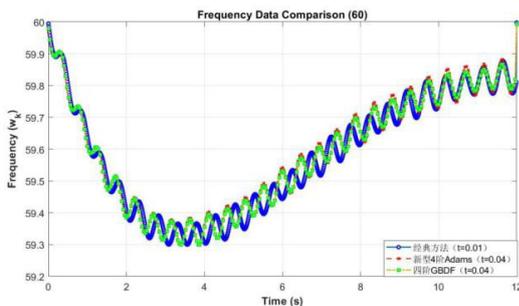


图 1 应用不同积分方法时的系统平均频率曲线

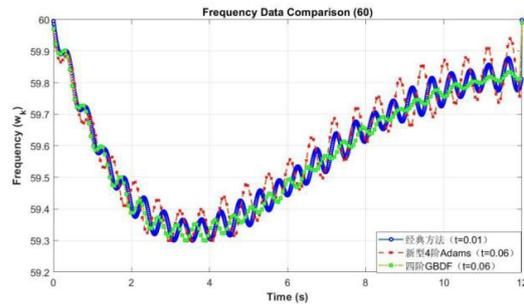


图 2 应用不同积分方法时的系统平均频率曲线

为更深入的比较两种先进积分方法的数值稳定，表 1 比较两种高阶积分方法计算结果的均方根误差（RMSE）和平均绝对误差（MAE）。可以看出，四阶 GBDF 方法计算出的 RMSE 和 MAE 两个误差值显著低于 Adams 方法的结果，这一结果从数学角度验证了四阶 GBDF 方法具有更加出色的数值稳定性。

表 1 两种先进积分方法计算结果的 RMSE 和 MAE 比较结果

发电机节点	RMSE		MAE	
	Adams	GBDF	Adams	GBDF
1	0.00096	0.00056	0.00079	0.00046
2	0.00060	0.00036	0.00046	0.00029
3	0.00049	0.00029	0.00040	0.00024

表 2 比较了三种积分方法在不同积分步长下的迭代次数、目标函数值和计算时间。由结果可知，新型四阶三步 Adams 方法在迭代次数和计算时间方面均超越了其他方法，尽管在更大步长（t=0.06）下其精度上略有不足，但在较大的步长下（t=0.04），该方法以更少的迭代次数和更短的计算时间实现了更高的计算效率。四阶 GBDF 方法虽然在迭代次数上不及新型四阶三步 Adams 方法，但在采用更大步长（t=0.06）时，其计算时间接近四阶三步 Adams 方法，而且计算结果精度明显强于四阶三步 Adams 方法。

表 2 不同积分方法和步长的比较结果

积分方法	迭代次数 / 次	目标值 / \$	计算时间 / ms
经典方法 (t=0.01)	170	3.11	335
改进四阶三步 Adams (t=0.04)	24	3.17	30
改进四阶三步 Adams (t=0.06)	25	3.41	19
四阶 GBDF (t=0.04)	29	3.12	163
四阶 GBDF (t=0.06)	26	3.15	94

以上仿真结果表明，利用新型积分方法处理 DFS-OPF 问题中的微分方程约束，能显著提高优化问题的计算效率和精度，对于电力系统频率稳定性研究具有显著的应用价值。

对于精度要求较高时,可以选用大步长的四阶 GBDF 方法,而对于计算效率和精度要求均较高时,可以优先选用改进的四阶三步 Adams 方法。不管采用哪一种先进积分方法,相较于经典方法,在计算效率上都有了质的提升。

5. 结语

为提高动态频率稳定约束最优潮流问题的求解效率,针对隐式梯形积分方法数值稳定性差的问题,本文提出采用改进的四阶三步隐式 Adams 和四阶广义后向差分公式两种积分方法,对优化问题中的微分代数方程进行差分,以此提高求解效率和准确度。此外,本文采用 Kron 缩减技术降低导纳矩阵规模,有效减少了等式约束的数量,进一步提升了问题的求解效率。仿真计算结果表明,改进的三步隐式 Adams 法,在步长增加时,能以更少的迭代次数和更短的计算时间实现更高的计算效率,特别适用于求解对实时性要求较高的动态优化问题。GBDF 法则因其高精度和强大的数值稳定性,在处理刚性强、动态特性复杂的电力系统问题时,展现了巨大的应用潜力。本文所提出的方法为动态频率稳定约束最优潮流问题的高效求解提供了坚实的技术支持,并为电力系统频率稳定性研究开辟了新的研究路径,对于推动电力系统动态优化与实时调度技术的发展具有重要的意义。

参考文献:

[1] 柳飞扬,曾平,李征.电网故障下全功率风电场内部机组的暂态稳定性分析[J].电力系统保护与控制,2022,50(05):43-54.

制,2022,50(05):43-54.

[2] Zhao X, Wei H, Qi J, et al. Frequency stability constrained optimal power flow incorporating differential algebraic equations of governor dynamics[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2020, 36(3): 1666-1676.

[3] 刘瑞阳,薛云灿,冯宝玥,等.光伏发电系统模糊分段步长算法最大功率点跟踪策略[J].热力发电,2016,45(5):48-53.

[4] 刘冬兵,王永,林宗兵.微分求积法的一类线性多步法[J].数学的实践与认识,2021,51(15):256-263.

[5] 潘明帅,汪芳宗,宋墩文,杨学涛.基于广义向后差分方法的电力系统暂态稳定性快速数值计算方法[J].电力系统保护与控制,2018,46(01):9-15.

[6] 张小辰,程浩忠,Santiago GRIJALVA,Bazargan MASOUD.一种基于 Kron 简化的跨区域可用传输能力分布式算法[J].电力系统自动化,2013,37(18):68-74.

作者简介:

赖梁杰(2000.08—),男,汉,四川内江人,硕士研究生,研究方向:电力系统优化运行。

基金项目:

广西科技重大专项《东南亚气候特征下给予人工智能的 HVAC 能效提升系统研究与应用》(编号:桂科 AA23073006)。