

高温作业专用服装设计优化模型

邓上煜 唐宾徽

四川大学锦城学院 计算机与软件学院 四川 成都 611731

【摘要】 关于高温作业下的专用防护服材质的最优厚度问题, 本文通过改进的有限差分法得到环境温度和各层厚度已知情况下的温度分布的数值解, 利用灵敏度分析和模拟退火算法求解在给定条件下的最优厚度, 解决了高温作业专用服装的优化设计问题。

【关键字】 灵敏度分析; 有限差分法; 模拟退火算法

1 问题重述

高温环境专用服装通常由三层织物材料构成, 记为 I、II、III 层, 其中 I 层与外界环境接触, III 层与皮肤之间还存在空隙, 将此空隙记为 IV 层。现假设 I 层、II 层、III 层的织物材料紧密贴合、忽略织物材料的热收缩、织物材料的导热系数不随温度升高而变化。为设计专用服装, 将体内温度控制在 37°C 的假人放置在实验室的高温环境中, 测量假人皮肤外侧的温度。本文通过改进的有限差分法得到环境温度和各层厚度已知情况下的温度分布的数值解, 利用灵敏度分析和模拟退火算法求解高温作业专用服装的优化设计问题。

数据来源于 2018 年高教社杯全国大学生数学建模竞赛题目 A 题附件 2

2 建模前准备

2.1 数据预处理

分析附件 2 的数据变化, 为减小实验误差, 使用移动平均滤波器进行降噪。其降噪定义式如下:

$$T_n = \frac{t_n + t_{n-1} + \dots + t_{n-N+1}}{N}$$

式中: T_n -第 n 次采样的实验温度, 单位为°C; t_n -第 n 个采样时刻, 单位为 s; N -采样数据个数。根据定义式, 利用 MATLAB 软件编写程序对附件 2 数据降噪, 得到图 2-1。

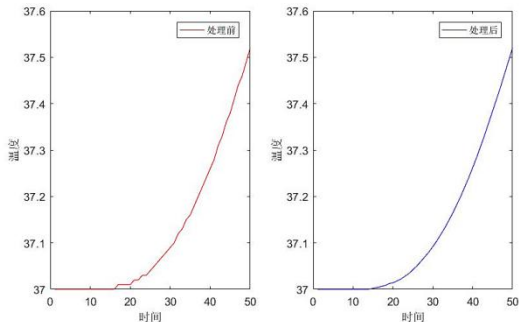


图 2-1 移动滤波器数据降噪处理前后图像对比

分析图 2-1, 横坐标代表实验时间, 单位为 s; 纵坐标代表实验温度, 单位为°C。通过图像对比分析, 发现处理后的曲线相比于处理前的曲线更平滑, 说明采用移动平均滤波器减小了附件 2 的数据噪声。

2.2 热传导方程推导

查阅资料, 得到傅里叶导热定律:

$$dQ = -kS\nabla u \quad (1)$$

式中: k -介质的热传导率, 单位为 $W/(m \cdot ^\circ C)$; S -热量所流过物质的截面面积; ∇u -温度梯度, 单位为 $^\circ C/m$; dQ -均匀各向同性介质在任意时刻各点所传递的热量, 单位为 J。

在给定体积 V 的情况下, 计算 t_1 至 t_2 时刻的比热容:

$$Q = cm\Delta u = \iiint_V c\rho [u(x,y,z,t_2) - u(x,y,z,t_1)] \quad (2)$$

式中: c -比热容, 即每单位质量的物质温度升高 1°C 时所吸收的热量, 单位为 $J/(kg \cdot ^\circ C)$; m -质量, 单位为 kg; Δu - t_1 至 t_2 时刻的温度变化量, 单位为°C; ρ -介质的密度, 单位为 kg/m^3 。

联立 (1)、(2) 式, 消去热量 Q , 最后得到三维空间内的热传导方程式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3)$$

由于本文的热传导模型是建立在一维空间内的, 因此得到本文模型的热传导方程式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4)$$

$$q = \frac{Q}{S \cdot t} \quad (6)$$

3 模型建立与求解

3.1 基于改进的有限差分法的温度分布模型

计算温度分布数值解, 根据热量、热流密度以及比热容之间的关系和改进的有限差分法得出温度递推公式, 用系统初始状态时的温度迭代求解递推公式。

3.1.1 模型建立

(1) 有限差分模型

有限差分法求解微分方程组的基本思想在于利用有限个离散点刻画微分方程组所定义的连续的定解区域, 将微分用差分近似代替, 将原方程组及约束条件用代数方程组近似计算, 从而得到原问题的近似解。

其有限差分的递推公式推导过程如下:

首先对 (4) 式进行离散化处理:

$$\begin{cases} u_0^j = u(0, jm) = 75 \\ u_N^j = u(x, t) \\ u_i^0 = u(in, 0) \end{cases}$$

式中: m -时间的步长; n -厚度的步长。

其次, 利用向前差分的原理, 根据泰勒级数展开式, 得到有限差分递推公式:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{m} = \frac{k(u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j)}{cn\rho} \quad (5)$$

式中: u_i^j -第 i 个时间步长与第 j 个厚度步长的节点所对应的温度函数泰勒级数展开式。结合热传递方程组, 推导得到近似的代数方程组。

但现有的差分法不能求解边界条件含有未知参数时的微分方程组。因此, 本文对现有的有限差分法做出改进, 求解含有未知参数的第三类边界条件的热传递方程组。

(2) 表面传热系数求解

根据稳定状态下流入、流出微元的热流密度相等的热力学定理, 求解含未知参数的边界温度变化。

首先引入热流密度这一参数描述边界热传导问题, 其与热量的关系式如下:

式中: q -热流密度, 单位为 W/m^2 ; Q -热量, 单位为 J ; S -截面面积, 单位为 m^2 ; t -时间, 单位为 s 。

分析降噪后的附件 2 实验数据, 发现在 $[1645, 5400]s$ 的区间内, 假人皮肤外侧的温度不随时间变化, 稳定在 $48.08^\circ C$ 。由此推导出在工作时间为 1645 秒时, 系统进入稳定导热状态。此时, 热流密度和温度场均与时间无关。

将假人与服装以及假人与服装之间的空隙视为同心圆柱体, 以圆柱体的法线与外界空气的交点作为原点, 热传递方向作为横轴正方向, 时间作为纵轴, 建立二维坐标系, 描述边界热流密度传导过程, 得到图 3-1。

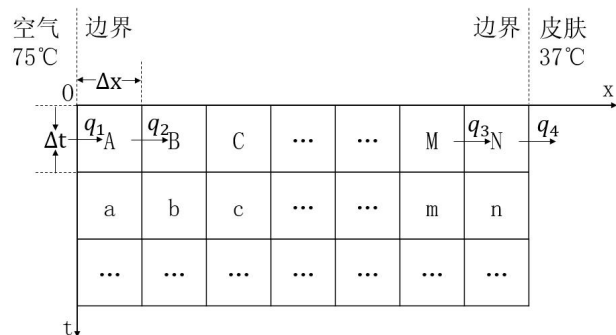


图 3-1 二维坐标系示意图

分析图 3-1。区域 A 表示外界环境与 I 层接触的微元; q_1 -从外界环境进入区域 A 的传导热的热流密度和辐射热的热流密度; q_2 -从区域 A 流出的传导热的热流密度; 区域 N 表示 IV 层与皮肤表面接触的微元; q_3 -从区域 M 进入区域 N 的传导热的热流密度; q_4 -从区域 N 流出的对流热的热流密度和辐射热的热流密度。

根据 (1)、(6) 式, 得到传导热的热流密度表达式:

$$q = -k \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (7)$$

式中: k -热传导率, 单位为 $W/(m \cdot ^\circ C)$; ΔT -边界两侧的温度变化量, 单位为 $^\circ C$; Δx -边界微元长度, 单位为 mm 。

借理想黑体的辐射热模型, 得到辐射热的热流密度表达式:

$$q = \varepsilon \sigma (T + 273)^4 \quad (8)$$

式中: ε -发射率, 即实际物体相对于黑体热辐射效率的比值; σ -黑体吸收能力系数, 单位为 $W/(s \cdot m^2 \cdot K^4)$ 。

根据牛顿冷却定律, 得到对流热的热流密度表达式:

$$q = h\Delta T \quad (9)$$

式中: h -表面传热系数, 单位为 $W/(m \cdot ^\circ C)$

已知在稳定导热状态下的外界空气温度为 $75^\circ C$, 皮肤表面温度为 $37^\circ C$, IV层边界温度为 $48.08^\circ C$, 查阅资料, 得到外界环境与 I 层边界接触点的表面传热系数为 $30W/(m \cdot ^\circ C)$, 结合 (7) (8) (9) 式, 递推解得皮肤与表面传热系数为 $11W/(m \cdot ^\circ C)$, 并得到此时系统的温度分布图, 见图 3-2。

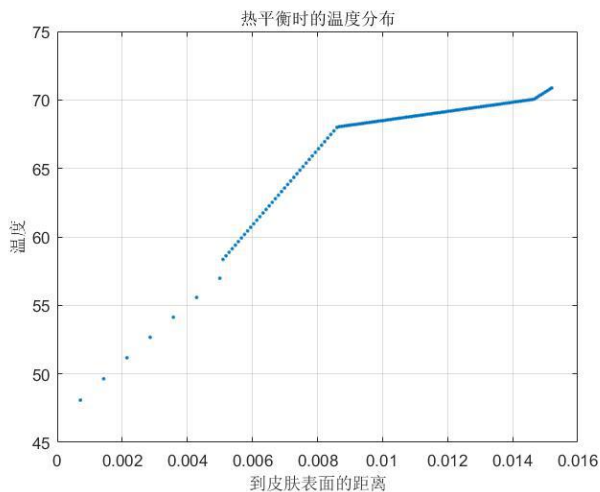


图 3-2 热平衡时系统温度分布图

由图 3-2 可知, 距皮肤表面距离为 0.005 米、0.0086 米、0.0146 米时, 温度发生突变。对应到系统各点, 分别为: IV 层与III层的边界点、III层与II层的边界点、II层与I层的边界点。分析温度突变现象, 应为气体流动时, 越靠近边界, 其流动速度越低, 所以在边界处形成一层热薄膜。薄膜带有热阻, 因此产生了换热温差。

综上所述, 求解得到皮肤表面与IV层边界接触点的表面传热系数为 $11W/(m \cdot ^\circ C)$, 外界环境与 I 层边界接触点的表面传热系数为 $30W/(m \cdot ^\circ C)$ 。

3.1.2 温度分布求解

步骤一: 将得到的系统热传递方程组的定解区域细分成有限个同等大小且相邻不重叠的微元网格。

步骤二: 设置步长, 其步长的设置需满足:

$$\begin{cases} s = \frac{km}{c\rho n^2} \\ 0 < s \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

式中: s -差分检验值。根据上式检验得到: 若时间步长为 1s, 则厚度步长过大, 迭代次数过少。为减小有限差分的迭代误差, 对附件 2 温度随时间变化的函数进行拟合, 将一秒内的温度变化视为线性变化, 进而缩小时间步长。根据 I 层、II 层、III 层以及IV层对应的比热容和导热系数设置各层的时间和厚度的迭代步长。

步骤三: 判断微元是否处于边界。

若处于边界, 采用边界热流密度递推公式。其公式由表面传热系数的推导过程得到, 为:

$$(q_i - q_{i+1})\Delta t = c\rho\Delta x(T_{j+1} - T_j), \quad (10)$$

式中: q_i -第 i 次流入的热流密度, 单位为 W/m^2 ; q_{i+1} -第 i 次流出的热流密度, 单位为 W/m^2 ; T_{j+1} -第 $j+1$ 个时刻, 单位为 s ; T_j -第 j 个时刻, 单位为 s 。边界处的微元利用稳态时的温度值作为初始值代入 (10) 式, 计算得到不同时刻的数值解。

3.1.3 模型结果

根据模型一的求解过程, 最后得到温度分布的数值解部分结果如图 3-3 和图 3-4。

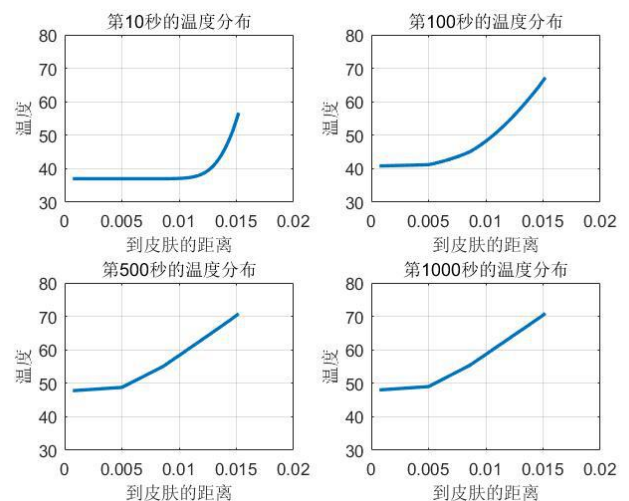


图 3-3 不同时刻温度分布折线图

上图选取了第 10 秒、第 100 秒、第 500 秒及第 1000 秒时的系统各点温度分布情况。

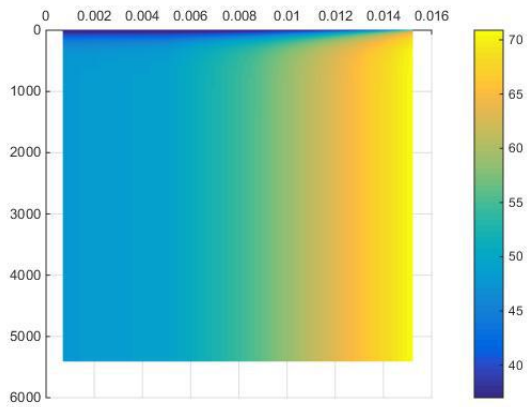


图 3-4 温度分布热力图

上图的横坐标为到皮肤表面的距离，单位为米，纵坐标为时间，单位为秒。颜色的变化情况反映了温度的变化情况，由图易得IV层的温度变化情况较其他层轻。

3.2 基于模拟退火算法的II层厚度最优化模型

求解在给定情况下的II层的最优厚度，通过问题分析得到最优化问题的约束条件和目标函数，利用模拟退火算法迭代计算，基于前一模型的温度分布数值解计算过程，得到满足给定条件的II层最优厚度。

3.2.1 模型建立

分析问题得到环境温度为 65°C、IV 层的厚度为 5.5mm 时时，II 层厚度的最优化模型：

$$\begin{aligned} \min z &= L_2 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} T \leq 47^\circ\text{C}, t = 60\text{min} \\ T \leq 44^\circ\text{C}, t = 55\text{min} \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

3.2.2 模型求解

根据模拟退火算法确定II层的最优厚度。算法的基本思想在于将目标函数看做能量函数，模型参数视为温度，寻找基态的过程实质为求目标函数极小值的过程。

算法具体步骤如下：

步骤一：将II层的厚度设定为模拟退火算法参数，其变化范围为[0.6,25]mm。在此范围内随机搜寻初始值 m_0 ，计算能量函数值 $q(m_0)$ 。

步骤二：对步骤一的模型进行扰动产生新模型 m ，计算新模型的能量函数值 $q(m)$ ，得到：

$$\Delta q = q(m) - q(m_0)$$

式中： Δq -目标函数值改变量； $q(m)$ -新模型的目标函数值； $q(m_0)$ -初始目标函数值。

步骤三：当 $\Delta q < 0$ 且满足（6）式时，表明新模型被接受；当 $\Delta q > 0$ 或不满足（6）式时，表明此时新模型按照概率接受，概率表达式如下：

$$P = e^{-\frac{\Delta q}{T}}$$

式中：P-概率；T-温度。

当模型被接受时，定义：

$$m_0 = m$$

步骤四：在温度 T 下，重复一定次数的步骤二和步骤三。

步骤五：缓慢降低温度，并重复步骤二直到满足收敛条件。

用 MATLAB 软件计算得到模拟退火算法在迭代计算过程中第II层厚度对应的内能，如图 3-5 所示。

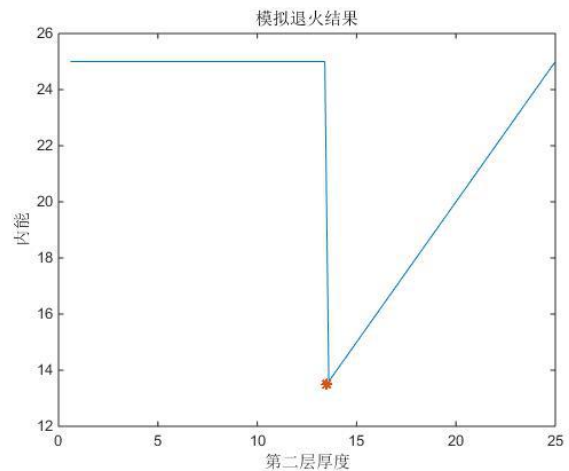


图 3-5 模拟退火算法内能变化图

分析图 3-5，在II层厚度为 13.48mm 时，模拟退火算法计算的内能最低，此时的II层厚度即为最优值。

3.2.3 模型结果

用模拟退火算法计算得出在给定条件下的最优II层厚度如下：

表 3-1 II 层最优厚度

T_h	t	$T_{\max}$	L_2	L_4
65°C	60min	44°C	13.48mm	5.50mm

表 3-1 中, T_h -环境温度; t -工作时间; T_{max} -工作时间为 60min 时的温度; L_2 -II 层的最优厚度; L_4 -IV 层的厚度。

3.3 基于灵敏度分析的 II 层和 IV 层厚度最优化模型

求解在给定状态下 II 层和 IV 层的最优厚度, 通过灵敏度分析确定评价函数中 II 层和 IV 层的权重系数, 其次利用模拟退火法, 以和上一模型同样的求解过程迭代计算得到在给定条件下的 II 层和 IV 层的最优厚度。

3.3.1 模型建立

将求解 II 层和 IV 层的最优厚度的多目标规划问题转为单目标规划问题求解。定义评价函数:

$$\min z = aL_2 + bL_4$$

式中: a -II 层的权重系数; b -IV 层的权重系数。

利用局部灵敏度分析的因子变化法, 计算 IV 层和 II 层权重系数。以 II 层的灵敏度分析为例, 具体步骤如下:

将 IV 层厚度设置为 12.8mm, 令 II 层厚度每次变化 0.1mm; 基于前述问题的温度分布求解过程, 计算出皮肤外侧温度, 并据此计算温度随 II 层厚度变化的平均斜率作为灵敏度。

因此定义灵敏度为:

$$\begin{cases} l_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta d} \\ R_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} l_i}{n-1} \end{cases}, j = 2, 4$$

式中: l_i -第 i 个微元的温度变化率; u_i -第 i 个微元的温度; Δd -厚度的变化值; R_j -皮肤外侧温度对于第 j 层材料的厚度变化的灵敏度。

同理, 设置 II 层厚度为 3.5mm, 令 IV 层每次厚度变化 0.1mm, 计算得出皮肤外侧温度随 IV 层厚度变化的灵敏度。

计算得到 II 层灵敏度值为 0.5685; IV 层灵敏度值为 0.3885。因此 II 层厚度的变化对皮肤外侧温度的影响更大。

参考文献:

- [1] 潘斌. 热防护服装热传递数学建模及参数决定反问题. 浙江: 浙江理工大学. 2016 年。
- [2] 苏云. 王云依. 李俊. 消防服下空气层热传递机制研究进展. 纺织学报. 第 37 卷第 1 期: 167-172, 2007 年。
- [3] 牟星星. 一维热传导方程数值解法及 matlab 实现分离变量法和有限差分法. 2018 年 9 月 15 日。
- [4] 姜龙聪. 刘江平. 模拟退火算法及其改进. 工程地球物理学报. 第 4 卷第 2 期: 135-139, 2007 年。

因此 II 层和 IV 层的权重系数分别为 0.5685 和 0.3885。得出各项权重占总权重的比例饼图如图 3-6 所示。

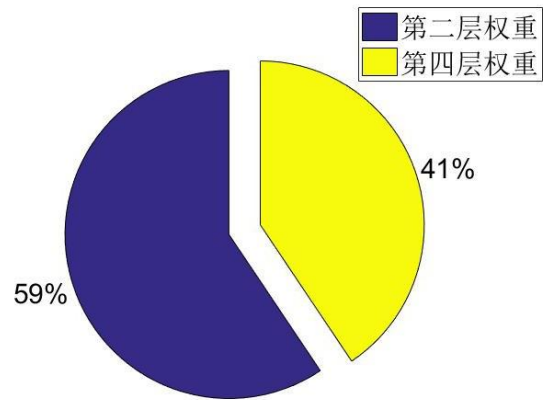


图 3-6 权重比例饼图

分析问题得到环境温度为 65°C、IV 层的厚度为 5.5mm 时时, II 层厚度的最优化模型:

$$\begin{aligned} \min z &= 0.5685L_2 + 0.3885L_4 \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} T \leq 47^\circ\text{C}, t = 30\text{min} \\ T \leq 44^\circ\text{C}, t = 25\text{min} \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

3.3.2 模型求解及结果

基于上一模型的求解过程, 设定模型参数为 II 层和 IV 层的厚度, 其变化范围分别为 [0.6, 25], [0.6, 6.4], 迭代计算得到 II 层和 IV 层的最优厚度, 如表 3-2 所示。

表 3-2 II 层和 IV 层的最优厚度

T_h	t	T_{max}	L_2	L_4
80°C	30min	43.9°C	15.06mm	3.43mm

4 结语

表 4-2 中, T_h -环境温度; t -工作时间; T_{max} -工作时间为 30min 时的温度; L_2 -II 层的最优厚度; L_4 -IV 层的最优厚度。