泰勒公式的研究型教学

李　斐　钱　婷
（西安石油大学理学院，陕西 西安 710065）

摘要：泰勒公式是微分学的重要定理，是理工科和经管类学生均需掌握的内容。但实际教学表明，学生对这部分的理解并不是很好。文章在分析这一现象产生的原因的基础上，以研究型教学为导向，对教学进行了创新，旨在使学生更好掌握“泰勒公式”，帮助学生尽快适应高等数学的思维模式，使其产生学习高等数学的兴趣。

关键词：泰勒公式；研究型教学；数学实验；数学建模

泰勒（B.Taylor）公式是微分学的重要定理，它的基本思想是用高阶多项式逼近高阶可微函数。泰勒公式有两种形式，即带有皮亚诺（G.Peano）型余项的形式和带有拉格朗日（J.L.Lagrange）型余项的形式，前者是一阶微分公式的推广，后者是拉格朗日微分中值定理的推广。泰勒公式具有重要的理论意义和广泛的应用价值，如它是进一步研究函数性态的理论基础，利用它可以计算函数的近似值，可以求$\frac{0}{0}$型未定式极限，还可以证明不等式。因此，不管对工科学生，还是对经管学生，都应该理解泰勒公式及其蕴含的数学思想。

然而，实际教学之后发现，学生对这部分的理解和掌握并不是很好。问卷结果显示，大部分学生学完之后的感触是：“难死了、难死了、难死了”，“不会”，“很难理解”，“听不懂”，“不知道怎么用、什么时候用”…反思这样的结果，主要是由以下三方面原因所致。首先，泰勒公式本身的问题。这部分内容自身具有复杂、抽象的特点，理解起来具有一定的难度。其次，教的问题。传统的一支粉笔、一张黑板的授课方式很难做到让这部分内容更具直观性。再者，学生的问题。泰勒公式的授课对象是大学一年级第一学期的新生，他们刚学完极限、导数、微分及其中值定理，还没有完全适应无穷的世界，还没有完全适应高等数学的思维模式及其学习方式。

基于上述分析，文章以“研究型教学”为导向，在“泰勒公式”的教学过程中进行了创新，这不仅能够帮助学生理解“泰勒公式”，而且能够使其对高等数学的学习有了新的认识，使他们的字典里少些“难”“不懂”“枯燥”这样的词汇，多些“感觉还可以”“挺有意思的”等等。

一、问题导入

首先，通过一组照片——星海、飓风、向日葵、玫瑰花、蜗牛及彩虹棒棒糖，向学生展示自然界和生活之中充满了“e”，使其对“e”产生兴趣。接着，讲述关于自然常数 e 的故事。瑞士数学家雅各布・伯努利（J.Bernoulli，1654–1705）在研究复利问题时发现了一个有趣现象：假设在银行存了 1 块钱，银行的年利率是 100%，则 1 年后连本带息可得$(1+1)^2=2$元。如果半年就计算一次利息，半年利率为 50%，则 1 年后连本带息可得$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=2.25$元。如果继续缩短利息周期，按每周计算一次利息，则 1 年后连本带息可得$\left(1+\frac{1}{52}\right)^{52}=2.692596954437178$元。照这样下去，如果计算周期再短一些，比如按天计算、按时计算、按分计算、按秒计算、甚至更短，那我们岂不是要发财了？然而，我们的美梦破灭了，雅各布・伯努利发现随着计算周期 n 的不断增大，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$是一个介于 2 和 3 之间的常数，而非无穷大，但他没有得出最终结果。历经半个世纪之久，瑞士数学家欧拉（L. Euler，1707–1783）解决了这一问题，并于 1729 年开始用 e 表示这一常数，即$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e$。由此，导出问题：$e$=? 如何求其近似值?

二、问题分析

可以通过指数函数 $y=e^x$ 求 e。也就是说，我们需要对指数函数$y=e^x$进行逼近。回顾微分的近似计算，对e^x的逼近进行推理分析，使学生明白如何利用多项式逼近 e^x。这部分借助计算机语言和多媒体，辅之以动画，使学生更加直观的认识到可以利用多项式函数对指数函数进行逼近，并且近似精度随着多项式次数的增大而提高，由此导出本节课。

第二章的最后一节学习微分时，给学生讲过可以通过微分进行近似计算，即用一次多项式逼近函数。因此，先复习微分的近似计算，再用其求 e 的近似值，分析出用微分进行近似的精度不高。总结出微分近似计算的优点是形式简单、计算方便，缺点是精度不高、无法估计出误差大小。通过分析可知，虽然微分的近似精度并不高，但是它启发我们可以通过增加多项式的次数来提高近似精度。

因此，我们尝试用二次多项式逼近 e^x。这里需要处理两个问题：其一、二次多项式的系数如何确定？其二、用二次多项式逼近 e^x 是否果真能够提高近似精度？通过分析微分的近似，逐步引导学生探究出这两个问题的答案。随着这两个问题的解答，学生不仅习得了确定多项式系数的方法，而且认识到可以通过增加多项式的次数来提高逼近 e^x 的近似精度。

随后，通过编辑计算机程序，得到 2 次、3 次、6 次及 7 次多项式的图像，以此逼近 e^x（图 1），使学生更加直观的体会到通过增加多项式的次数来提高逼近 e^x 的近似精度。顺理成章，我们将 e^x 的逼近推广为任意一个高阶可微函数的逼近，这便是泰勒公式。

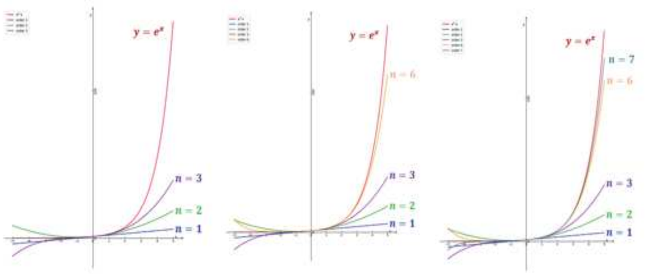

图 1 多项式逼近指数函数

三、泰勒公式

通过第二部分的分析，学生已经理解了泰勒公式的本质，以及构造高次多项式的方法。这部分直接给出泰勒公式，介绍几个名词术语，对余项进行分析。最后，总结“微分”“拉格朗日微分中值定理”与“泰勒公式”之间的关系，指出当泰勒公式中的 $n\to\infty$ 时便是下册中要学到的幂级数，使学生能够从宏观上对这几部分内容有所认识，激励学生在学习过程中要养成善于思考和总结相关知识点之间关系的习惯。

泰勒公式的本质是用高阶多项式逼近高阶可微函数，而多项式是最简单、性质最好的一种函数，因而泰勒公式蕴含着复杂问题简单化、用已知求解未知这一极为朴素的思维模式。我们称 $p_n(x)$ 为泰勒多项式，称 $x_0=0$ 时的泰勒公式为麦克劳林公式，称 $0[(x-x_0)^n]$ 为皮亚诺型余项，称 $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 为拉格朗日型余项。皮亚诺型余项是余项的定性分析，它是一个局部性质，其含义是当 $x\to x_0$ 时，多项式函数与函数 $f(x)$ 之间的误差是 $(x-x_0)$ 的高于 n 阶的无穷小量，即在点 x_0 的足够小邻域内，随着 n 的增大，可以不断提高多项式函数逼近 $f(x)$ 的精度。拉格朗日型余项是定量分析，它是大范围的性质，若 $f^{(n+1)}(x)$ 在 I 内有界，则多项式函数与函数 $f(x)$ 之间的误差随着 n 的增大而趋于 0。也就是说，若 $f^{(n+1)}(x)$ 在区间 I 上有界，则用多项式函数逼近函数 $f(x)$，随着 n 的增大，可以在整个区间 I 上达到任意的精确度。

若 $n=0$，则 $f(x)=f(x_0)+f(\xi)(x-x_0)$，$\xi$ 介于 x 与 x_0 之间，即泰勒公式是拉格朗日中值定理的推广。若 $n=1$，则带皮亚诺型余项的泰勒公式为：$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$，即泰勒公式是微分的推广。若 $n=1$，则带拉格朗日型余项的泰勒公式为：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{1!}(x-x_0)^2$$

，ξ 介于 x 与 x_0 之间，即用微分进行近似计算时，误差为 $\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$。若 $n\to\infty$，这便是泰勒级数，我们将在下册级数理论的幂级数部分再与泰勒相遇。以上就是“微分”“拉格朗日中值定理”“泰勒公式”和“幂级数”之间的关系。

四、拓展与应用

这部分首先对泰勒公式的发展历程做一简单介绍，然后通过例题向学生介绍泰勒公式在近似计算、求极限、证明不等式方面的应用。最后通过思考题——过山车的轨道，再次激发学生对泰勒公式的兴趣，培养学生独立思考、独立分析问题和解决问题的能力，以用促学。

1712 年，英国数学家泰勒（B.Taylor，1685–1731）宣布了泰勒定理，这已经是现代形式的泰勒公式。三年之后，为了得到一般函数的展开式，他在 1715 年出版的《正的和反的增量方法》中推导出他在 1712 年得到的泰勒定理。1742 年，苏格兰数学家麦克劳林（C.Maclaurin，1698–1746）得出泰勒定理在 $x_0=0$ 时的特殊情形。历经半个世纪之后，法国数学家拉格朗日（J.L.Lagrange，1736–1813）在 1797 年给出了拉格朗日中值定理，并用来推导一般情形。1813 年，拉格朗日给出了带拉格朗日型余项的泰勒定理。泰勒定理的严格证明是法国数学家柯西（A.L.Cauchy，1789–1857）在 1829 年给出的，这距泰勒定理的问世有一个多世纪之久。至于带皮亚诺型余项的泰勒公式，则是意大利数学家皮亚诺（G.Peano，1858–1932）给出的。

这段历史简介不仅使泰勒定理更加鲜活，而且使学生认识到数学的发展绝不是一帆风顺的，更多情况是充满犹豫、徘徊，要历经艰难曲折，甚至会面临危机；数学家要克服困难、战胜危机。希望这一简介能够让学生汲取到数学家们的探索与奋斗精神，使其获得鼓舞、增强学习高数的信心。

近似计算所选例题为：计算 e 的近似值，使误差不超过 10^{-6}。这不仅使学生领会到拉格朗日型余项的切实之用，而且与本节课的导入部分相呼应，回答了如何计算 e 的近似值，如何计算满足某精度要求的 e 的近似值。这里的计算结果表明，n 取 9 的时候，小数点后 6 位都是正确的，可见逼近速度非常快。

思考题选取了切近学生生活，学生会比较感兴趣的过山车的轨道设计问题。过山车的轨道实则是一条函数曲线，那么对于一个未知的函数曲线，我们如何去构造它呢？泰勒公式告诉我们，可以用多项式函数去逼近。那么用多少次多项式函数去逼近，多项式函数的系数该如何选取呢？这就需要考虑到所想要设计出的过山车的刺激程度、安全问题、制造过程中机器、材料等各种参数，而这正是数学建模的基本思想。

五、小结

多项式函数是各类函数中最简单的一种，用多项式逼近函数是近似计算和理论分析的一个重要内容。工科学生和经管学生都应该很好地理解和掌握“泰勒公式”这个内容，但教学效果往往并不理想。为提高学生的学习兴趣，降低泰勒公式的复杂、抽象程度，提升教学成效，文章以“e 的故事”引出近似计算问题，进而引出 e^x 的逼近问题，再以问题为指引，通过一个个的小问题对 e^x 的逼近进行解答，水到渠成地得到“泰勒公式”，再利用泰勒公式求解了 e^x 的近似值，最后以开放性的思考题——“过山车的轨道设计”来结束这节课的教学。整个教学过程以研究型教学为指引，蕴含以下创新点：引入的创新，教学设计的创新，多媒体、数学实验、数学史及思政元素的加入等教学内容和教学手段的创新，思考题的创新。这样的教学易于学生掌握“泰勒公式”，适应高等数学的思维模式，萌发对高等数学的兴趣。

参考文献：

[1] 朱士信，唐烁 . 高等数学（第 2 版）（上册）[M]. 北京：高等教育出版社，2020.

[2] 韦宝平 . 大学数学类课程研究型教学模式理念及应用 [J]. 山西财经大学学报，2020，42（S1）：87–89.

[3] 杨瑞云 .R 语言在高等数学中的应用 [J]. 中阿科技论坛（中英阿文），2020（04）：162–163.

[4] 朱士信，唐烁 . 高等数学（第 2 版）（下册）[M]. 北京：高等教育出版社，2020.

[5] 李文林 . 数学史概论（第四版）[M]. 北京：高等教育出版社，2021.