

完全扰动下的压缩感知数学模型及 OMP 算法分析

刘勇飞

(青海建筑职业技术学院(基础及素质教育部), 青海 西宁 810012)

摘要: 压缩感知是建立在矩阵分析、图论、数值线性代数、优化与运筹学、泛函分析等基础上的一种全新的信息获取和处理的理论框架. 在实际应用中, 观测向量和观测矩阵同时受到干扰, 称为完全扰动, 本文介绍了完全扰动下的压缩感知数学模型, 并基于 RIP 条件分析了 OMP 算法的性能.

关键词: 压缩感知; 完全扰; RIP; OMP

时代在飞速发展, 基于移动互联网、万物互联和 5G 的需要, 人们对信息的需求量剧增, 而高速处理信息的方法必然是这个时代的一种需求, 生活中面临大量的数据的存储和传输的问题, 在减少成本和能量的消耗的基础上, 如何高效处理数据以减少数据处理的压力, 很多年来, 信号采样的理论基础都是源自奈奎斯特理论, 该理论针对于本身具有稀疏特性的信号, 有一定的局限性, 获取、存储、处理信息过程中会产生巨大的资源浪费, 因为它在获得大量数据后, 又要丢弃, 另一方面, 生活中很多信号并不需要精确的表达. 于是如何高效处理本身具有稀疏特性的信号, 产生了压缩感知. 压缩感知 (Compressed Sensing, CS) 理论, 处理稀疏或者在某种变换域上稀疏的信号时, 通过观测矩阵将信号从高阶矩阵投影成低阶矩阵方法实现信号的压缩采样. 在远小于奈奎斯特采样率的条件下, 将信号的采样变成信息的采样, 使数据采集和压缩同时进行, 然后通过解优化问题重建原始信号. 压缩感知对一些领域的应用有着深远的影响, 它给医学、无线通信、雷达探测、生物传感、机器学习、信道编码等领域带来了革新, 压缩感知的理论基础涉及到很多数学学科, 主要包括矩阵分析、数值线性代数、优化理论、近似理论、凸优化、图论、拓扑几何、优化与运筹学等. 稀疏信号的恢复算法在理论上是可行的, 在实际生活中也是存在的, 它的数学理论就是在稀疏条件下求解一个欠定方程的解问题. 在压缩感知中如何设计有效的观测矩阵, 如何设计一个有效的重构算法, 一直是研究的热点问题. 这两个问题有时不是完全独立, 很多时候考虑重构算法时需要同时考虑观测矩阵, 近些年也有一些不错的结论. 压缩感知近些年来一直备受关注, 每年以它为关键词的文章在数以千计的增加, 它的理论突破是很多学者在自己的领域内不断研究的结果, 近些年研究方向一部分集中在完全扰动情况下重建算法的恢复性能, 因为许多实际应用中存在噪声以及观测矩阵与预先设计不太一致的问题, 这称为完全扰动. 完全扰动下研究重建算法的性能有着现实意义, 很多学者展开了相关的研究.

一、稀疏表示

压缩感知的使用前提是信号具有可压缩性, 而许多现实世界中的信号都具有可压缩性, 比如声音、图像. 所谓可压缩性是指

信号的特性, 第一种情形是信号本身是稀疏的, 第二种情形是信号本身不稀疏, 但在某个变换域中体现出稀疏特性, 第三种情形是信号在某个变换域下近似稀疏, 例如, JPEG 技术是因为图像在离散余弦基或小波基上具有可压缩性. 可压缩的信号 $x \in \mathbb{R}^N$ 可以用一组稀疏基 $\{\Psi_i\}_{i=1}^N$ 来表示

$$x = \sum_{i=1}^N s_i \Psi_i$$

二、观测矩阵

观测矩阵的设计是研究者努力的目标, 也是压缩感知重要的一环, 如何设计观测矩阵才能保证信号的有效信息, 稀疏条件下, 如何从观测向量中恢复原始信号, 基于以上前提, 众多学者发现观测矩阵 Φ 和稀疏基 Ψ 的非相干性是确保重构的条件, 但是验证非相干性是非常困难的, 随着研究的深入, 观测矩阵的 RIP1、列相干性出现, 最终许多专家提出有限等距条件 (RIP), 这是压缩感知理论的一个重要突破, 使其得到了实际的应用.

三、解的优化

起初研究者尝试利用 l_0 最优化基于下式从观测向量中恢复稀疏信号 x , 然而

$$\begin{cases} \min_x \|x\|_0 \\ s.t. y = \Phi x, \end{cases}$$

这是行不通的, 搜索解的空间过于庞大, 属于 NP 问题.

Chen 文章中阐明, 一定限制条件下使用凸函数来近似非凸函数, 进而转化为凸优化问题, 如果满足 RIP 条件, 可以通过下式求解.

$$\begin{cases} \min_x \|x\|_1 \\ s.t. y = \Phi x. \end{cases}$$

完全扰动下可通过下式求解.

$$\begin{cases} \min_x \|\hat{x}\|_1 \\ s.t. \|\hat{y} - \hat{\Phi}x\|_2 \leq \varepsilon_{E,n}. \end{cases}$$

其中, $\hat{y} = y + n$, $\hat{\Phi} = \Phi + E$, $\varepsilon_{E,n}$ 是与矩阵扰动和噪声有关的参数.

四、重构算法

近些年来, 国内外学者研究出很多算法, 其中的贪婪算法主要包括匹配跟踪 (MP)、正交匹配跟踪算法 (OMP)、压缩采样匹配跟踪算法 (CoSaMP)、子空间跟踪算法、正则化正交匹配跟踪算法、循环硬门限法.

信号的重构算法是压缩感知理论中重要的一部分, 随着对重构算法的研究不断深入, 推动压缩感知理论的发展也不断延伸. 目前重构算法的研究已经取得了很多成就和进步, 经实验验证贪婪算法和凸优化法恢复效果较为理想. 其中贪婪类算法不但复杂度低, 而且运算速度较快, 对硬件要求也较低, 实际场景中易于实现,

因此拥有广泛的应用。

五、压缩感知基础数学模型

压缩感知理论于 2006 年已经提出，就立即受到国内外研究者的重视，并成为一大热点问题，近二十年年间，利用压缩感知技术来重建可压缩的信号备受青睐。我们采用矢量空间中的向量来描述信号，使之数学化，稀疏信号即为向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ ，使其中大多数位置为 0，索引集合 $[N] \subset \{1, 2, \dots, N\}$ ， S 是 $[N]$ 的一个子集记为，代表集合的基数，即集合中所含元素的个数。 \bar{S} 记为全集为索引集合的补集。 $\text{supp}(x) = \{i : x_i \neq 0\}$ 表示支撑集， $\|x\|_0 = |\text{supp}(x)|$ ，尽管 $\|x\|_0$ 不是一个范数，但常常把其粗略地称为 x 的 ℓ_0 范数， $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_i|$ ， $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}$ ， Φ_2^K 表示中 2 范数最大的 K 列子矩阵， $\frac{\|E\|_2}{\|\Phi\|_2} \leq \varepsilon$ ， $\frac{\|E\|_2^K}{\|\Phi\|_2^K} \leq \varepsilon^{(K)}$ ， $\frac{\|n\|_2}{\|y\|_2} \leq \varepsilon_1$ ，把非零个数最多只有 K 个的向量 x 称为 K 稀疏向量，最初的研究考虑了一种理想的不受任何干扰的压缩感知数学模型：

$$y = \Phi x$$

其中 $y \in \mathbb{R}^m$ 、 $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times N}$ ($m \ll N$)、 $x \in \mathbb{R}^N$ 分别表示观测向量、观测矩阵、稀疏向量。如图 1 更为直观。

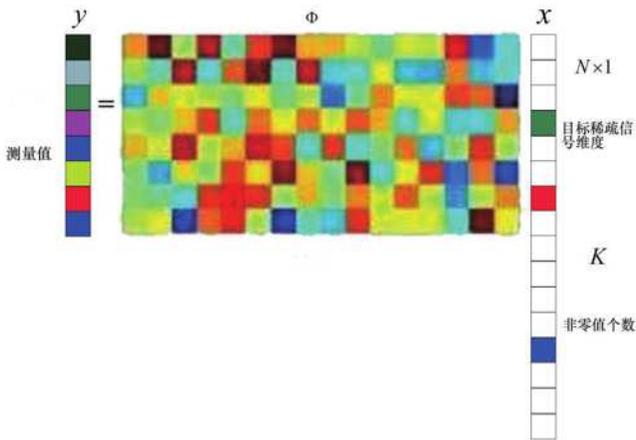


图 1 压缩感知基础数学模型

实际应用问题中，很多信号都不是绝对稀疏的，而在某个稀疏字典 Ψ 或正交变换域中会呈现稀疏性，此时不受任何干扰的压缩感知的数学模型如图 2 所示。

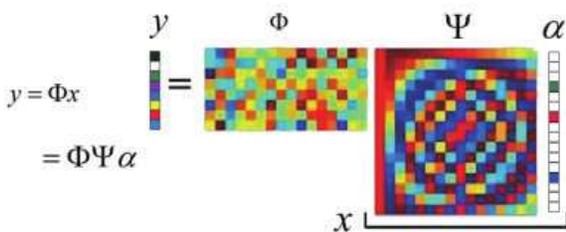


图 2 某个变换域中呈现稀疏性压缩感知基础数学模型

为了使接下来的叙述方便，以上两种基础数学模型合并成一表达式 $y = \Phi x$ 。

六、完全扰动下的压缩感知数学模型

研究人员发现很多场景中都有噪声存在，考虑有噪声的场景，数学模型需要添加噪声项 n ，建立了一个有噪声的数学模型：

$$y = \Phi x + n$$

然而，在实际的应用中，观测向量和观测矩阵往往同时受到干扰，即为完全扰动的数学模型：

$$y = (\Phi + E)x + n$$

其中， E 为扰动矩阵，完全扰动问题的出现在各种实际场景中，如遥感 (remote sensing microscopy)、信源分离、波达方向和雷达成像等。

考虑时的情况， $E, n \neq 0$ 可以将完全扰动问题的解扩展为

$$\begin{cases} \min_{x^\#} \|x^\#\|_1 \\ \text{s.t.} \|y^\# - \hat{\Phi} x^\#\|_2 \leq \varepsilon_{E,n} \end{cases}$$

其中， $y^\# = y + n$ ， $\hat{\Phi} = \Phi + E$ ， $\varepsilon_{E,n}$ 是与矩阵扰动 E 和噪声向量 n 相关的参数。

根据有限等距 (RIP) 性质，在完全扰动情形下，Ding 等推导得到了 OMP 算法的收敛条件及重建误差，文献改进了 OMP 算法的收敛条件。

七、RIP 准则

定义 1 设 $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times N}$ ， $K \leq m$ ， $0 < \delta < 1$ ，矩阵 Φ 满足参数为的有限等距是指：如果对于任意的有

$$(1 - \delta) \|x\|_2^2 \leq \|\Phi x\|_2^2 \leq (1 + \delta) \|x\|_2^2$$

δ 取最小值时记为 δ_K ，即为矩阵 Φ 的有限等距常数 (RIC)。

本文基于 RIP 条件研究完全扰动下的 OMP 算法性能。

八、OMP 算法及其恢复条件

正交匹配追踪算法 (OMP)

输入： Φ, y, K ，终止条件。

初始化：

$$r_0 = y, S_0 = \emptyset, n = 0.$$

在第次迭代过程中，重复以下步骤

$$n = n + 1;$$

$$S_n = \arg \max_{1 \leq i \leq N} | \langle r_{n-1}, \Phi_i \rangle |;$$

$$x_{S_n}^\# = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^{S_n}} \|y - \Phi_{S_n} x\|_2;$$

$$r_n = y - \Phi_{S_n} x_{S_n}^\#;$$

直到满足终止条件

$$\text{输出: } x^\# = \arg \min_{\{x | \text{supp}(x) = S_k\}} \|y - \Phi_{S_k} x\|_2$$

证明：首先在 OMP 算法中，

$$r_{n-1} = y - \Phi x_{n-1} = y - \Phi_{S_{n-1}} \Phi_{S_{n-1}}^\dagger y = P_{S_{n-1}}^\perp y.$$

$$h_{n-1} = \Phi^T r_{n-1} = \Phi^T (P_{S_{n-1}}^\perp)^T P_{S_{n-1}}^\perp y = \Phi_{S_{n-1}}^T r_{n-1},$$

在算法的迭代过程中 OMP

从观测矩阵 Φ 中选择与余向量最匹配的列向量, 选定后, 该列被添加到之前已经选好的列索引集合中, 通过将观测向量 y 投影到列索引构成的列空间中, 不难注意到, 把 y 和 Φ 分别替换为完全扰动下的 \hat{y} 和 $\hat{\Phi}$ 也是成立的, 即

$$r_{n-1} = \hat{y} - \hat{\Phi}x_{n-1} = y - \Phi_{s_{n-1}} \Phi_{s_{n-1}}^T y = \hat{P}_{s_{n-1}}^\perp y$$

以及

$$h_{n-1} = \hat{\Phi}^T r_{n-1} = \Phi^T (\hat{P}_{s_{n-1}}^\perp)^T P_{s_{n-1}}^\perp y = \Phi_{s_{n-1}}^T r_{n-1},$$

即可证得完全扰动下 OMP 能够恢复信号.

引理 3.1 设 $\text{supp}(x) = \Gamma$, $|\Gamma| = K$, 如果观测矩阵 $\hat{\Phi}$ 满足下列条件

$$\hat{\delta}_{K+1} < \frac{1 - \frac{\sqrt{2}\tau \|x_\Gamma\|_2}{(1-\varepsilon)\min_{i \in \Gamma} |x_i|}}{\sqrt{K+1} + \frac{\sqrt{2}\tau \|x_\Gamma\|_2}{(1-\varepsilon)\min_{i \in \Gamma} |x_i|}}$$

且有 $\|n_1\|_2 \leq \frac{1.3\tau}{1-\varepsilon} \|x_\Gamma\|_2$ 和 $\min_{i \in \Gamma} |x_i| > \frac{\sqrt{2}\tau}{1-\varepsilon} \|x_\Gamma\|_2$, 当 $\|r_k\|_2 \leq \frac{1.3\tau}{1-\varepsilon} \|x_\Gamma\|_2$ 的终止条件得到满足时, OMP 算法能够重建稀疏向量, 其中

$$\tau = \varepsilon_1 + \varepsilon + (1+\varepsilon) \left(\frac{\|x_\Gamma\|_2}{\|x_\Gamma\|_2} + \frac{\|x_\Gamma\|_2}{\sqrt{K} \|x_\Gamma\|_2} \right).$$

证明: 正交匹配跟踪算法 (OMP) 算法步骤 3 中, 该算法准确重建稀疏信号需要满足以下条件

$\max_{i \in \Gamma} |\langle r_{n-1}, \hat{\Phi}_i \rangle| > \max_{i \in \Gamma^c} |\langle r_{n-1}, \Phi_j \rangle|$, 根据最小二乘法, 在算法步骤 5 中可以得到 $\hat{x}_{s_{n-1}} = (\hat{\Phi}_{s_{n-1}}^T \Phi_{s_{n-1}})^{-1} \Phi_{s_{n-1}}^T y$, 之后可以得到

$r_{n-1} = P_{\Gamma/s_{n-1}}^\perp \hat{\Phi}_{\Gamma/s_{n-1}} x_{\Gamma/s_{n-1}} + P_{\Gamma^c/s_{n-1}}^\perp n_1$, 不等式的左半部分推导可得

$$\max_{i \in \Gamma/s_{n-1}} |\langle r_{n-1}, \hat{\Phi}_i \rangle| \geq \|\Phi_{\Gamma/s_{n-1}}^T P_{\Gamma/s_{n-1}}^\perp \Phi_{\Gamma/s_{n-1}} x_{\Gamma/s_{n-1}}\|_\infty - \|\Phi_{\Gamma^c/s_{n-1}}^T (P_{\Gamma^c/s_{n-1}}^\perp n_1)\|_\infty$$

其中 $\|n_1\|_2 \leq \frac{\sqrt{1+\hat{\delta}_{K+1}}}{1-\varepsilon} (\varepsilon_1 + \varepsilon + (1+\varepsilon)(t_1+t_2)) \|x_s\|_2$. 不等式右半部分推导可得

$$\max_{i \in \Gamma^c} |\langle r_{n-1}, \hat{\Phi}_j \rangle| \leq \|\Phi_{\Gamma^c/s_{n-1}}^T P_{\Gamma^c/s_{n-1}}^\perp \Phi_{\Gamma^c/s_{n-1}} x_{\Gamma^c/s_{n-1}}\|_\infty + \|\Phi_{\Gamma^c/s_{n-1}}^T (P_{\Gamma^c/s_{n-1}}^\perp n_1)\|_\infty$$

不等式可转化为

$$\|\hat{\Phi}_{\Gamma/s_{n-1}}^T P_{\Gamma/s_{n-1}}^\perp \Phi_{\Gamma/s_{n-1}} x_{\Gamma/s_{n-1}}\|_\infty - \|\Phi_{\Gamma^c/s_{n-1}}^T (P_{\Gamma^c/s_{n-1}}^\perp n_1)\|_\infty \geq \|\Phi_{\Gamma^c/s_{n-1}}^T P_{\Gamma^c/s_{n-1}}^\perp \Phi_{\Gamma^c/s_{n-1}} x_{\Gamma^c/s_{n-1}}\|_\infty + \|\Phi_{\Gamma^c/s_{n-1}}^T (P_{\Gamma^c/s_{n-1}}^\perp n_1)\|_\infty$$

左侧进行推导可得

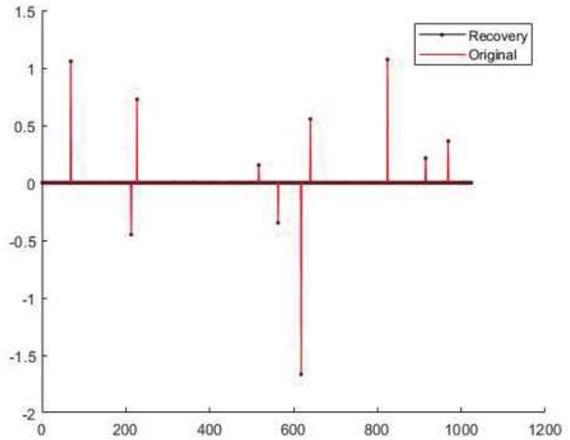
$$\|\hat{\Phi}_{\Gamma/s_{n-1}}^T P_{\Gamma/s_{n-1}}^\perp \Phi_{\Gamma/s_{n-1}} x_{\Gamma/s_{n-1}}\|_\infty - \|\Phi_{\Gamma^c/s_{n-1}}^T (P_{\Gamma^c/s_{n-1}}^\perp n_1)\|_\infty \geq (1 + \sqrt{K+1} \hat{\delta}_{K+1}) \min_{i \in \Gamma} |x_i|$$

右侧推导可得

$$\|\Phi_{\Gamma^c/s_{n-1}}^T P_{\Gamma^c/s_{n-1}}^\perp \Phi_{\Gamma^c/s_{n-1}} x_{\Gamma^c/s_{n-1}}\|_\infty + \|\Phi_{\Gamma^c/s_{n-1}}^T (P_{\Gamma^c/s_{n-1}}^\perp n_1)\|_\infty \leq \frac{\sqrt{2}\tau}{1-\varepsilon} (1 + \hat{\delta}_{K+1}) \|x_s\|_2$$

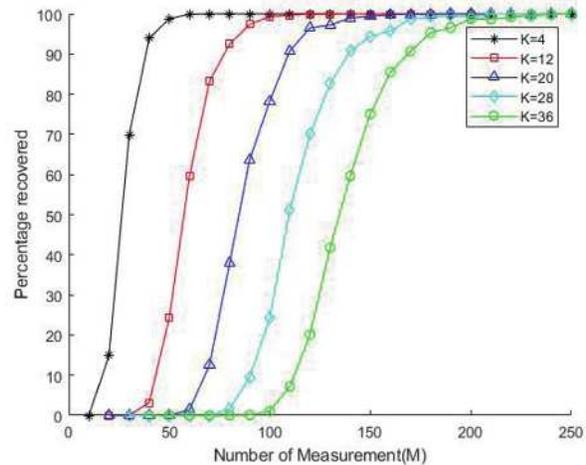
其中 $\tau_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon + (1+\varepsilon)(t_1+t_2)$. 证毕.

九、数值实验及 OMP 算法性能分析



实验 1

在仿真中第一个实验检测了信号长度为 1024, 观测矩阵宽度为 256, 完全扰动 $\varepsilon_{E,n} = 0.01$, $K=10$ 环境中的 OMP 算法的重建性能, 实验表明其抗扰动能力较强, 重建性能较优.



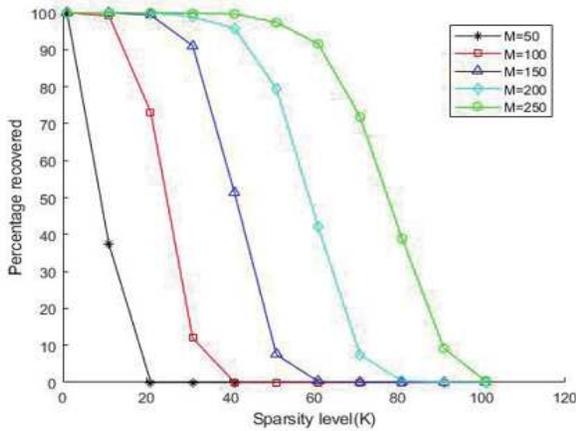
实验 2

实验 2 展示了完全扰动下, 取 $\varepsilon_{E,n} = 0.01$, 稀疏度 K 依次取 4、12、20、28、36 时, 不同测量数下的恢复性能, 实验表明稀疏度一定, 测量数越多, 恢复效果越好, 当测量数达到一定值时, 可以完全恢复, 同时也表明测量数一定, 稀疏度越小, 恢复效果越好.

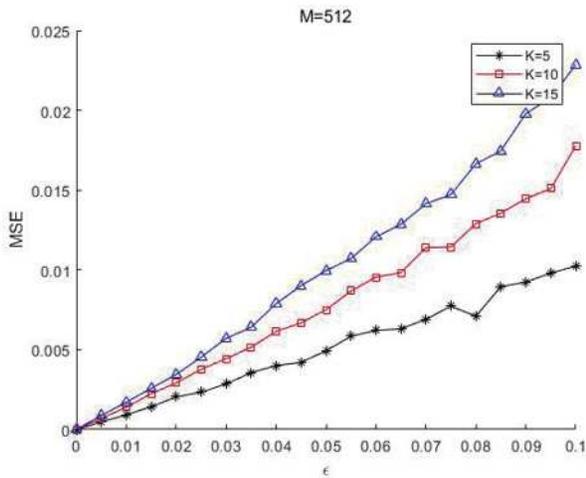
实验 3 展示了完全扰动下, 取 $\varepsilon_{E,n} = 0.01$, M 分别取 50、100、150、200、250 时, 不同稀疏度的恢复性能. 实验表明稀疏度一定, 测量数越多, 恢复效果越好, 当测量数达到一定值时, 可以完全恢复, 同时也表明测量数一定, 稀疏度越小, 恢复效果越好.

实验 4 展示了观测矩阵的维度为 256×1024 , 矩阵扰动参数 ε 取 (0,0.1) 值且稀疏度 K 依次 5、10、15 时的恢复性能. 实验表明稀疏度一定, 扰动值越大, 恢复的误差越大. 当扰动值一定, 稀疏度越大, 恢复效果越好. 从图上很容易看出 K 取

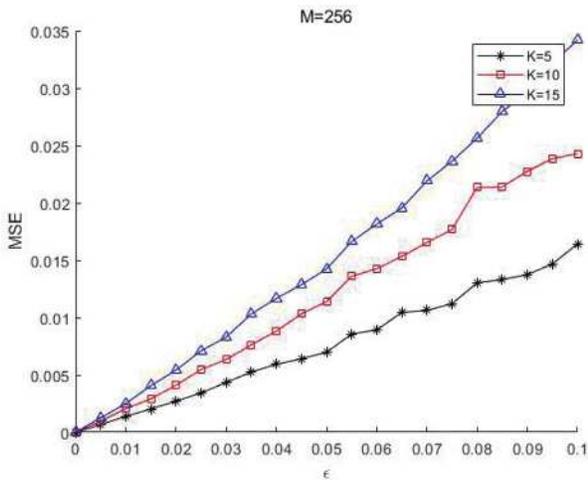
15 时优于 10 和 5.



实验 3

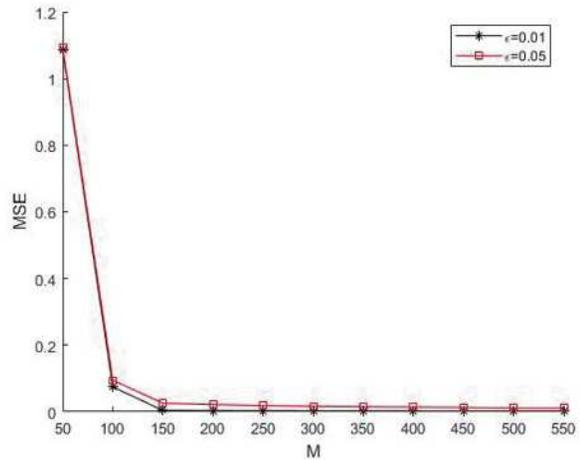


实验 4



实验 5

实验 5 展示了观测矩阵的维度为 512×1024 ，矩阵扰动参数 ϵ 取 $(0, 0.1)$ 值且稀疏度 K 依次 5、10、15 时的恢复性能。实验表明稀疏度一定，扰动值越大，恢复的误差越大。当扰动值一定，稀疏度越大，恢复效果越好。从图上很容易看出 K 取 15 时优于 10 和 5。结合实验 4 和 5 容易看出算法的平均误差几乎和扰动参数保持线性关系，而且算法中观测矩阵的维度越大，恢复效果越好，也就是 $m = 512$ 的恢复性能比 $m = 256$ 的恢复性能更佳。



实验 6

实验 6 探究了观测矩阵的宽度 m 对算法的重建稳定性的影响，矩阵的宽度 m 以 50 为间隔从 50 到 550 变化，矩阵参数 $\epsilon \in \{0.01, 0.05\}$ 。信号 x 的稀疏度 $K = 20$ ，结论为随着 m 值的增大，OMP 算法性能提高。

参考文献:

[1] 张晓波. 基于有限等距条件的压缩感知重建算法性能研究 [D]. 北京: 北京邮电大学, 2019.
 [2] 付敏, 郝嘉骏, 解烈军, 王金平. 压缩感知 omp 算法下信号重建方法研究. 数学物理学报, 2021 (005): 041.
 [3] 王建, 王松, 丁其, 洪樊书, 辰江锋, 张宏伟. 改进的基于压缩感知的自适应波束形成算法 [J]. 航天电子对抗, 2022, 38 (5): 18-21.
 [4] 曹海燕, and 叶震宇. 基于压缩感知理论的大规模 MIMO 系统下行信道估计中的导频优化理论分析与算法设计 [J]. 物理学报, 2022, 71 (5): 10.