HPM 视角下数列极限概念的教学设计

李亚亚
（西安财经大学数学学院，陕西 西安 710100）

摘要：结合极限概念的历史发展过程，将极限概念的形成、演进过程自然地融入到课堂教学过程中，构建了数列极限概念的教学设计，可作为高等数学概念教学的一个案例。

关键词：数列极限；数学史；课程思政；数学教学

极限是数学中一个非常重要的概念，它贯穿了整个微积分的发展过程。现行的高等数学教材都是先讲极限，然后再讲导数、连续、积分以及无穷级数等内容，但是微积分的历史并不是按照现行教材中呈现的逻辑发展起来的。在实际教学中，笔者发现学生之所以觉得极限概念抽象难懂并不在于极限本身，而在于它的表达方式—— $\varepsilon-N$ 和 $\varepsilon-\delta$ 语言。那么，为什么数列极限和函数极限的定义是用含有两个不等式的 $\varepsilon-N$ 和 $\varepsilon-\delta$ 语言来表述的？极限概念的教学中蕴含哪些思政元素？

国内一些学者就极限概念的教学改革已有不少研究成果。结合极限概念的历史发展过程，从我国古代刘徽的割圆术和庄周的截丈问题出发，引导学生自己发现并提出数列极限的直观定义，然后分析并呈现如何将直观定义进行严格数学化的过程，进而给出教材中的 $\varepsilon-N$ 定义。另外，将课程思政融入到实际教学中，对学生的思想行为产生积极的影响。

一、极限概念的教学设计

（一）创设情境，提出问题

我们在生活中经常会使用“极限”之类的语言，比如“不要挑战我的极限”等。如果把“极限”数学化，那它需要什么的定义呢？其实早在我国古代就有了极限思想，下面给出两个具体例子。

引例 1 用割圆术求圆的面积

刘徽在《九章算术》中提出用割圆术计算半径为 1 尺的圆的面积。他的具体做法是从圆的内接正六边形出发，将圆的内接正多边形的边数逐次加倍，计算边数逐次加倍后的内接正多边形的面积，一直计算到圆的内接正 192 边形。将其转化为如下数学问题。

作内接正六边形，将其面积记为 S_1；作内接正十二边形，将其面积记为 S_2；

作内接正二十四边形，将其面积记为 S_3；作内接正四十八边形，将其面积记为 S_4；⋯⋯

刘徽指出当圆的内接正多边形的边数无限增多时，其面积构成的数列 $\{S_n\}$ 无限接近于圆的面积 S。我们将圆的面积 S 称为数列 $\{S_n\}$ 的极限。

引例 2 截丈问题

庄周在《庄子 . 天下篇》中提出：“一尺之棰，日取其半，万世不竭。”将其转化为下面数学问题。

第一天截下的棰子长度为：$\frac{1}{2}$；第二天截下的棰子长度为：$\frac{1}{2^2}$；第三天截下的棰子长度为：$\frac{1}{2^3}$；

⋯⋯；第 n 天截下的棰子长度为：$\frac{1}{2^n}$；⋯⋯

当天数 n 无限增大时，截下的棰子长度构成的数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 无限接近于 0。我们将常数 0 称为数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 的极限。

（二）引导学生发现和提出极限的“直观”定义

上述两个引例表明极限是研究变量变化趋势的工具。引例 1 表明当圆的内接正多边形的边数无限增多时，其面积 $\{S_n\}$ 越来越接近于圆的面积 S，但是始终无法达到面积 S。也就是说，可以取一个边数非常非常多的圆内接正多边形，使得它的面积与圆的面积之差为 0.0001、0.00001 或者其他更小的正数，但是始终无法使圆内接正多边形的面积等于圆的面积。引例 2 表明当天数 n 无限增大时，截下的棰子长度 $\frac{1}{2^n}$ 越来越接近于 0，但是永远无法达到 0，这就是庄子所说的“万世不竭”。从上面的两个引例可以看出极限刻画了变量的变化趋势，它像是一个达不到的目标，可以离它越来越近，但是永远无法实现它。基于对引例的讲解，引导学生从上面两个引例中提炼出极限的直观定义：

定义 设 $\{x_n\}$ 是数列，如果存在常数 a，当 n 无限增大时，x_n 无限接近于 a，则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。

在实际教学中，借助于实例的引入，给出这样的直观定义，不仅可以说明极限概念出现的自然性，而且可以让学生对极限概念有个初步的认识。学生在中学已经接触到极限，可通过观察数列的变化趋势的方式计算一些简单的数列极限。例如，求数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 的极限。当 n 无限增大时，$\frac{1}{n}$ 无限接近于 0，则该数列的极限为 0。求数列 $\left\{1+\delta+\frac{1}{n}\right\}$ 的极限，其中 δ 是一个非常小的数。有些同学认为该数列的极限是 1，有些同学认为是 $1+\delta$。这是因为极限直观定义中的“无限接近”具有主观性。有人认为 δ 是一个非常非常小的数，可以忽略，但是有人认为即使 δ 是一个非常非常小的数，$1+\delta$ 也不等于 1，不能忽略。那么，如何科学客观地刻画直观定义中的“无限增大”“无限接近”呢？

（三）将极限的“直观”定义严格数学化

上面提到极限的直观定义中的“无限增大”“无限接近”具有主观性，那么对其进行严格的数学刻画呢？实数轴上两个数之间的距离可以刻画它们之间的接近程度，而两个数之间的距离是可以用绝对值来表示的。为此，可以绘制如下将极限的直观定义严格数学化的思维导图。

当 n 无限增大时，x_n 无限接近于 a

当 n 无限增大时，$|x_n - a|$ 无限小

当 n 无限增大时，$|x_n - a|$ 要多小有多小

存在正整数 N，使得 x_N 以后的所有项 x_n，都有 $|x_n - a|$ 要多小有多小

对任意给定的正数 ε，存在正整数 N，使得 x_N 项以后的所有项 x_n，都有 $|x_n - a| < \varepsilon$

图 1 极限定义严格化的过程

基于图 1 所示的从极限的直观定义到严格数学化的过程，给出如下现行高等数学教材中的极限定义：

定义 设 $\{x_n\}$ 是数列，如果存在常数 a，对任意给定的正数 ε，总存在正整数 N，使得当 $n > N$

时，恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立，则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。

为了使学生更好地理解定义中的 ε 和 N，给出如下例子。

例 1 数列 $\{x_n\} = \left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}(n = 1,2,\cdots)$，给定 $\varepsilon = 0.1$，$\varepsilon = 0.01$，$\varepsilon = 0.001$ 时，分别取怎样的正整数 N，才能使得当 $n > N$ 时，不等式 $|x_n - 1| < \varepsilon$ 成立呢？

解 给定 $\varepsilon = 0.1$，要使 $|x_n - 1| = \left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon = 0.1$，只要 $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1 = 9$，故取 $N = 9$。同理可得，给定 $\varepsilon = 0.01$ 时，取 $N = 99$，给定 $\varepsilon = 0.001$ 时，取 $N = 999$。

由此可以看出，ε 具有任意性，可以任意地取无论多么小的正数，它的作用在于刻画数列的项 x_n 与常数 a 的接近程度，ε 越小，表示 x_n 越接近于 a。虽然 ε 具有任意性，但是一旦给出，就是一个确定的数，以便根据它来求 N。N 与 ε 有关，可以看成是 ε 的函数，但是 N 是不唯一的。比如，给定 $\varepsilon = 0.1$，求得 $N = 9$，那么大于 9 的任何正整数都能使得 $|x_n - 1| < \varepsilon$ 成立。也就是说，给定 $\varepsilon = 0.1$，N 可以取任何大于 9 的正整数。

（四）课程思政的融入

从 2.1 节给出的引例中可以看出极限思想由来已久，现行的极限定义是在 19 世纪数学严格化发展背景下，法国数学家柯西（Augustin Louis Cauchy，1789–1857）最早给出的，但是他当时没有使用 $\varepsilon - N$ 和 $\varepsilon - \delta$ 语言，用的是“无限趋近”这样带有主观性的语言。德国数学家魏尔斯特拉斯（Karl Weierstrass，1815–1897）基于柯西的极限定义给出了数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义，这个定义一直沿用至今。通过讲述数列极限的历史，让学生了解我国古代辉煌的数学成就，增加他们的民族自豪感和自信心，也让学生看到一个数学概念从雏形到发展完善经历的漫长过程，体会数学家坚持不懈的毅力。

让学生观察下列数列的变化趋势，判别哪些数列有极限？如果有极限，给出对应的极限。

例 2（1）$x_n = (-1)^n$；（2）$x_n = n(-1)^n$；（3）$x_n = \dfrac{1}{2^n}$；（4）$x_n = \dfrac{n-1}{n+1}$。

解 通过观察（1）和（2）中数列的变化趋势，可知两个数列的极限都不存在。因为当 n 为偶数时，$(-1)^n$ 的值为 1，而当 n 为奇数时，$(-1)^n$ 的值为 −1，也就是说，数列在 1 和 −1 之间来回摆动，没有一个一致的变化趋势，使得它们的极限不存在。通过观察（3）和（4）中数列的变化趋势，可知两个数列的极限都存在，分别为 0 和 1。因为当 n 无限增大时，两个数列都有一个一致的变化趋势，即使达到极限的过程较缓慢，但最终都达到了。通过这个例子的讲授，让学生明白“有志者立长志，无志者常立志”，在今后的学习生活中要有一个远大的理想抱负，而且要有为实现理想抱负不畏艰难的勇气和决心，要有坚持不懈的毅力。

三、教学反馈与启示

在实际教学中，我们发现与传统的讲授型教学相比，采用以引例 – 直观定义 – 严格定义的三段式讲授数列极限的定义，可以引发学生的好奇心，激发他们的学习兴趣，明显增加了学生的课堂参与度。课后，通过对学生是否愿意和喜欢这样的教学设计进行问卷调查，全班 50 名同学，91% 的同学的回答是肯定。由此可见，绝大多数学生对数列极限概念的教学中融入数学史和课程思政的教学方式持赞同态度。通过与学生访谈，了解到这样的教学设计不仅能帮助学生更好地理解数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义，而且能让学生感受到数学家们的智慧，切实体会到原来数列极限的定义并不是一蹴而就的，它经历了一个渐进式的发展过程，这是几代数学家呕心沥血的结果。还有学生说道以前自己总觉得高等数学只是一门抽象的数学课程，没想到数学概念中也蕴含着生活中一些朴素的哲理。

参考文献：

[1] 易颖 . 以数学史为切入点的高等数学中极限的思政教学经验 [J]. 高等数学研究，2022，25（5）：82−84.

[2] 戴立辉，黄建吾，王宜洁 . 一类数列极限的推广与应用 [J]. 大学数学，2022，38（5）：101−107.

[3] 张辉，李应岐，方晓峰等 . 基于“以学为中心”的数列极限教学设计研究 [J]. 高等数学研究，2022，25（1）：112−115.

[4] 吴传生 . 微积分 [M].4 版 . 北京：高等教育出版社，2020：32−37.

基金项目：西安财经大学教学改革项目（22xcj010）

作者简介：李亚亚（1988−），女，博士，讲师，主要从事近现代数学史和数学教育研究。