

基于问题及数学软件的数值分析课程教学案例设计

邢 丽

(上海第二工业大学, 上海 201209)

摘要:《数值分析》这门课注重方法的构造和计算,注重解决实际问题,计算过程复杂,传统抽象的教学方法很难让学生直观地理解计算执行过程以及目测计算结果的直观图形。MATLAB 数学软件弥补了以上不足,在教学过程中,引入实际问题,渗入数学软件,实现对算法和结果的图形化,对图形的动态化,以此来激发学生的学习兴趣 and 创新能力,提高教学效率。

关键词:数值分析;数学软件;可视化;创新设计;教学案例

数值分析这门课程注重算法的构造和误差分析,注重实际应用,注重对计算机的使用。随着计算机的发展,科学计算软件发展极其迅速,软件主要面对科学计算、可视化以及交互式程序设计的高科技计算环境。它将数值分析、矩阵计算、科学数据可视化以及非线性动态系统的建模和仿真等诸多强大功能集成在一个易于使用的视窗环境中,为科学研究、工程设计以及必须进行有效数值计算的众多科学领域提供了一种全面的解决方案。在这种背景下,怎样打破传统教学模式,让理论和实践结合,让一串串烦琐的数据变得形象直观,是当下数值分析教学中尤其重要的一个探索过程。本文以二维插值实际问题为例,探索了在教学过程中让学生带着解决问题的疑问,构造解决问题的方法,寻找解决问题的工具,实现数学问题结果的可视化,从而达到更高效的

教学效果。

一、问题引入

某山区测得一些地点的高度如下表。平面区域为 $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 3.6$, (单位:千米)

表 1 山区地貌测量数据

x (km) \ y (km)	1.2	1.6	2.0	2.4	2.800	3.2	3.6	4.0
1.20	1.13	1.25	1.28	1.23	1.04	9.00	5.00	7.00
1.60	1.32	1.45	1.42	1.40	1.30	7.00	9.00	8.50
2.00	1.39	1.50	1.50	1.40	9.00	1.10	1.06	9.50
2.40	1.50	1.20	1.10	1.35	1.45	1.20	1.15	1.01
2.80	1.50	1.20	1.10	1.55	1.60	1.55	1.38	1.07
3.20	1.50	1.50	1.60	1.55	1.60	1.60	1.60	1.55
3.60	1.48	1.50	1.55	1.51	1.43	1.30	1.20	9.80

根据以上数据作出该山区的地貌图,并通过此例对最近邻点插值、双线性插值方法和双三次插值方法的插值效果进行比较。

二、理论背景

这是一个二维插值问题,二维插值常用到的方法有最近邻插值,双线性插值,双三次插值等。数学原理是根据已知节点通过插值得到更多节点的数据,从而得到空间中连续性更好的曲面,用数学软件作图,从而刻画出了山区地貌图。三种插值方法如下所述:

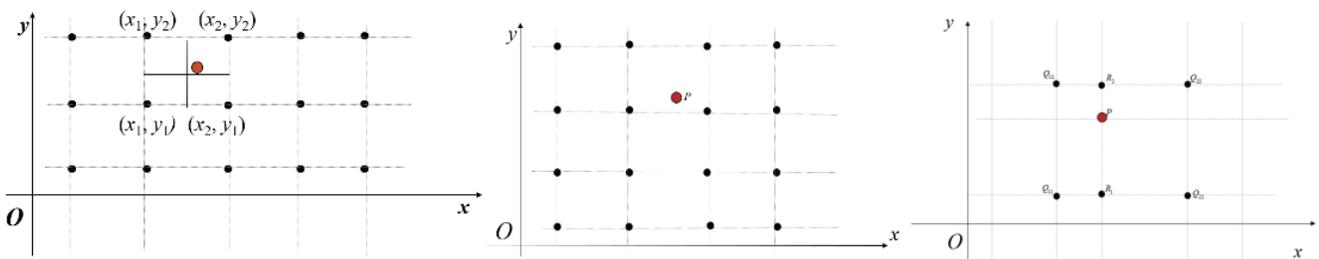


图 1 三种插值节点图

图 1 中第一幅是最邻近插值,二维或高维情形的最邻近插值,与被插值点最邻近的节点的函数值即为所求。第二幅是双线性插值,

已知函数 $f(x, y)$ 在四个点 $Q_{11}, Q_{12}, Q_{21}, Q_{22}$

的值,要得到函数在 P 点的值,首先在 x 方向的插值,得到

$$f(R_1) \approx \frac{x-x_2}{x_1-x_2} f(Q_{11}) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(Q_{21}), \quad f(R_2) \approx \frac{x-x_2}{x_1-x_2} f(Q_{12}) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(Q_{22}),$$

然后在 y 方向进行线性, 得到 $f(P) \approx \frac{y-y_2}{y_1-y_2} f(R_1) + \frac{y-y_1}{y_2-y_1} f(R_2)$ 。

第三幅是双三次插值,双三次插值是二维空间中最常用的插值方法。在这种方法中,函数 f 在点 (x, y) 的值可以通过矩形网

格中最近的十六个采样点的加权平均得到, 在这里需要使用两个多项式插值三次函数, 每个方向使用一个。通过下列公式进行计算:

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x^i y^j$$

四、数学软件求解

在教学的过程中, 为了使学生理解不同插值方法的优缺点, 应用 MATLAB 数学软件求解, 步骤如下:

步骤 1: 导入已知数据; 步骤 2: 数据节点网格分割; 步骤 3:

用 MATLAB 插值函数实现不同方法的插值 $z = \text{interp2}(x_0, y_0, z_0, x, y, 'method')$, 对参数中的 Method 进行不同的设置, $z = \text{interp2}(x, y, z, xi, yi, 'nearest')$ 为最邻近插值, $z = \text{interp2}(x, y, z, xi, yi)$, 参数缺省为双线性插值, $z = \text{interp2}(x, y, z, xi, yi, 'cubic')$ 为双三次插值; 步骤 4: 对计算结果画图。

通过程序运行, 可以得到以下图形。

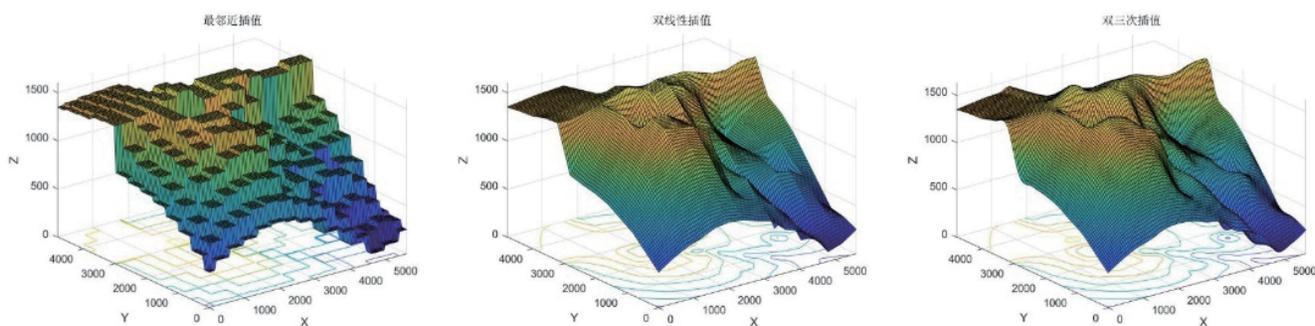


图 2 三种插值方法得到的山区地貌图

从直观的图形中, 可以很明显的看出双线性插值优于最邻近, 而双三次插值更是可以得到空间更光滑的曲面, 更客观地显示了山区地貌图。另外, 还可以在图形界面, 对图形进行旋转, 从不同的角度宏观的看到地貌图, 通过沉浸式的计算及画图过程, 激发学生浓重的好奇心和学习兴趣, 从而达到学以致用目的。

五、布置课后实践案例

在某海域测得一些点 (x, y) 处的水深 z 由下表给出, 船的吃水深度为 5 英尺, 在矩形区域 $[75, 200] \times [-50, 150]$ 里的哪些地方船要避免进入。数据如下:

表 2 某海域水测量数据

x	129	140	103.5	88	185.5	195	105
y	7.5	141.5	23	147	22.5	137.5	85.5
z	-4	-8	-6	-8	-6	-8	-8
x	157.5	107.5	77	81	162	162	117.5
y	-6.5	-81	3	56.5	-66.5	84	-33.5
z	-9	-9	8	8	9	4	9

六、教学总结与反思

在教学过程中要遵循建立数学模型, 构造计算方法, 编写上

机程序, 得出计算结果, 使计算结果可视化就是最后重要的一步。通过数学软件的演示, 使学生真正理解“工欲善其事必先利其器”的真正含义, 让学生意识到学习的过程中, 要注重方法的应用, 要把低效的“手动”转化为“自动”, 要把知识从“模糊”转化为“精确”, 要善于将所学知识运用到实际问题利器, 要善于打破传统, 探索新知。通过三维作图, 把图形呈现在三维空间当中, 开阔学生视野, 用辩证唯物主义去理解事物的发展过程, 理解“海纳百川, 有容乃大”的哲学思辨。从美观的图形中让学生认识到数学不仅严谨, 有时候也很浪漫!

参考文献:

- [1] 克利夫 .B. 莫勒 (Cleve.B.Moler). MATLAB 数值计算 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2020.
- [2] 王欢. 基于 MATLAB 二维插值法的地形分析 [J]. 山东工业技术, 2018 (14): 168.

作者简介: 邢丽 (1978-), 女, 副教授。研究方向: 微分方程数值解。