数学建模实例分析与教学启示

谢飞英
（上海南湖职业技术学院，上海 200439）

摘要：数学建模汇聚多个学科的交叉思想、方法和技术，在实际中有很大的应用价值，也有一定的难度。通过对 2022 年全国大学生数学建模竞赛 D 题的解题思路分析，按照数学建模步骤进行求解，结合数学建模思路灵活运用 excel，建立气象报文循环传输数学模型，并对其优化和升级。通过赛题分析为职业院校的数学老师在今后的高等数学教学工作中提供一些实际可操作的教学启示。

关键词：数学建模；矩阵变换；excel 表上作业；循环传输

一、数学建模的相关理论

数学建模是对数学思想和方法的高度运用，体现了数学在实际中的应用价值。它已经广泛地应用于科学、工程、金融、医学、环保、经济管理等领域，并成为当今现代科技和社会的支撑力量。

通过数学建模，可以将复杂的实际情况简化为一个易于处理和分析的数学问题。例如，在某个城市里，如果要优化公共交通系统，需要考虑多种因素，如等待时间、乘坐时间、客流量，以及车辆类型等。这时，数学建模可以帮助建立相应的数学模型，根据不同的约束条件和实际情况进行解析和优化，提高公共交通系统的效率和服务水平。

在实践中，数学建模通常通过以下步骤进行：问题分析、模型建立、模型求解、模型验证和结果分析。通过这些步骤，可以把实际问题转化为数学问题，进而找到最优的解决方案。

下面就 2022 年全国大学生数学建模竞赛 D 题的建模为例，进一步探索数学建模的实践应用和教学启示。

二、数学建模实例描述

2022 年全国大学生数学建模竞赛 D 题描述：当面临一些紧急救援任务时，需要对某些地方进行物资空投，为了防止在地面瘫痪时无法获取准确和完整的地面气象观测信息，通常对该地的重要目标点派遣气象小队来获取实时气象数据，并且通过卫星通信传输数据，从而保证物资能及时送达。

现有 N 支分队执行任务，一支气象分队在一个区域分别设立 1 个观测主站，2 个观测副站。每个站点每次只能发送一条信息，且发送信息时的间隔不能小于 1 分钟，但在发送信息时可以接收到任意多条信息。副站发送和接收消息的成功率均为 80%，主站发送和接收消息的成功均率为 100%。要求各分队间隔一小时对主副站所在地的气象信息进行一次采集，并按照以下要求来进行气象报文的信息共享。

问题一：如何在主站数量固定的条件下，最少时间内完成气象报文信息共享，找出最优方案，并以表格的方式给出传输方案？

问题二：如何在传输时间固定以及副站报文信息以大于 90% 的成功接收的概率要求下，找到最多主站进行气象报文信息共享，找到最优方案，并以表格形式给出副站报文传输方案？

问题三：如何在提高副站报文信息成功接收的概率（大于 97%）要求下，优化方案，并得到在固定时间内找到最多主站气象报文的信息传输方案？

三、分析模型，建立模型，求解模型

（一）模型假设和符号说明

基于题目给出的条件，给出以下模型假设：

1. 发送两条信息的时间间隔为一分钟。

2. 由于副站发送和接收概率均为 0.8，副站只发送不接受信息。

3. 在发送信息时，由于发送和接收信息的时间非常短，直接忽略。

4. 成功发送整条气象报文称为 1，半段气象报文称为 0.5。

5. 矩阵（表格）中没有接收和发送信息任务的用空白表示。

6. 在一条半信息中需要加入站点编号，增加站点编号最多为 6，总字符数小于 158，符合要求。

表一：符号说明

符号	说明
N	N 个分队执行任务
K	K 为发送轮数，时间
1.2.3	一条完整气象信息
i（1）	来自于 i 号主站的上半段气象信息
i（2）	来自于 i 号主站的下半段气象信息
ia	来自于 i 号主站下副站 a 的气象信息
ib	来自于 i 号主站下副站 b 的气象信息
Int（）	取整函数

注：模型假设部分，可以在分析题目时进行必要的增加和调整。

（二）模型一

题中可知收发消息的两种状态同时存在，每个主站拥有一条 100 字符的气象信息，最多可以发 1 条半信息，需要在最短的时间内，完成与最多的主站进行信息共享。

分析 K 与 N 的关系式：

每个主站得到全部信息需要 N–1（去掉每个主站自身的 1 条）条信息，按照最高效率传输方式为 1.5 条每分钟，根据条件第一分钟只能发送 1 条信息。

时间 = 总信息数 / 效率（注：总信息数 = 主站数 –1）

可以推出：N 个主站共享气象信息，与需要的时间 K 的关系式为

$$K = \mathrm{Int}\left(\frac{N-1}{1.5}\right)+1$$

上述关系式是从理论上的推导得到，需要实际排出信息发送的具体表格。

由于无先验信息，所有主站地位同等，应无差别对待，发送次序按循环传输原则进行，为了清晰表达收发情况，这里采用矩阵的方法，矩阵就是数表，故可以 excel 表上作业 .

这里的信息传输，采用了循环传输模型，经过多次尝试和检验得到的模型，也是本题的创新点之一。具体模型如图 1（模型一）：

比如 N=5，则 $K = \mathrm{Int}\left(\frac{5-1}{1.5}\right)+1 = 3$

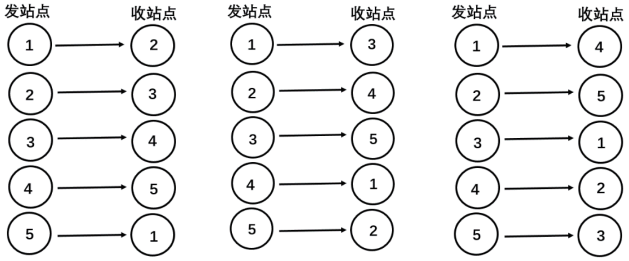


图 1：模型一

在 Excel 中运行结果如图 2：

			发出信息						目前信息含有量					
	发站点	收站点	1	2	3	4	5	站点	1	2	3	4	5
k=1	1	2	1					1	1				1
	2	3		2				2	1	1			
	3	4			3			3		1	1		
	4	5				4		4			1	1	
	5	1					5	5				1	1
	发站点	收站点	发出信息						1	2	3	4	5
K=2	1	3	1				5(1)	1	1		0.5	1	1
	2	4	1(1)	2				2	1	1		0.5	1
	3	5		2(1)	3			3	1	1	1		0.5
	4	1			3(1)	4		4	0.5	1	1	1	
	5	2				4(1)	5	5		0.5	1	1	1
	发站点	收站点	发出信息						1	2	3	4	5
K=3	1	4	1(2)				5	1	1	1	1	1	1
	2	5	1	2(2)				2	1	1	1	1	1
	3	1		2	3(2)			3	1	1	1	1	1
	4	2			3	4(2)		4	1	1	1	1	1
	5	3				4	5(2)	5	1	1	1	1	1

图 2：N=5 各主站点每分钟信息收发和信息含有详表

整个过程可以看作是把初始状态的单位矩阵，通过循环传输模型，得到满 1 矩阵。

当 N=9 时，$\mathbf{K=Int\left(\frac{9-1}{1.5}\right)+1=6}$

操作过程如图 3：

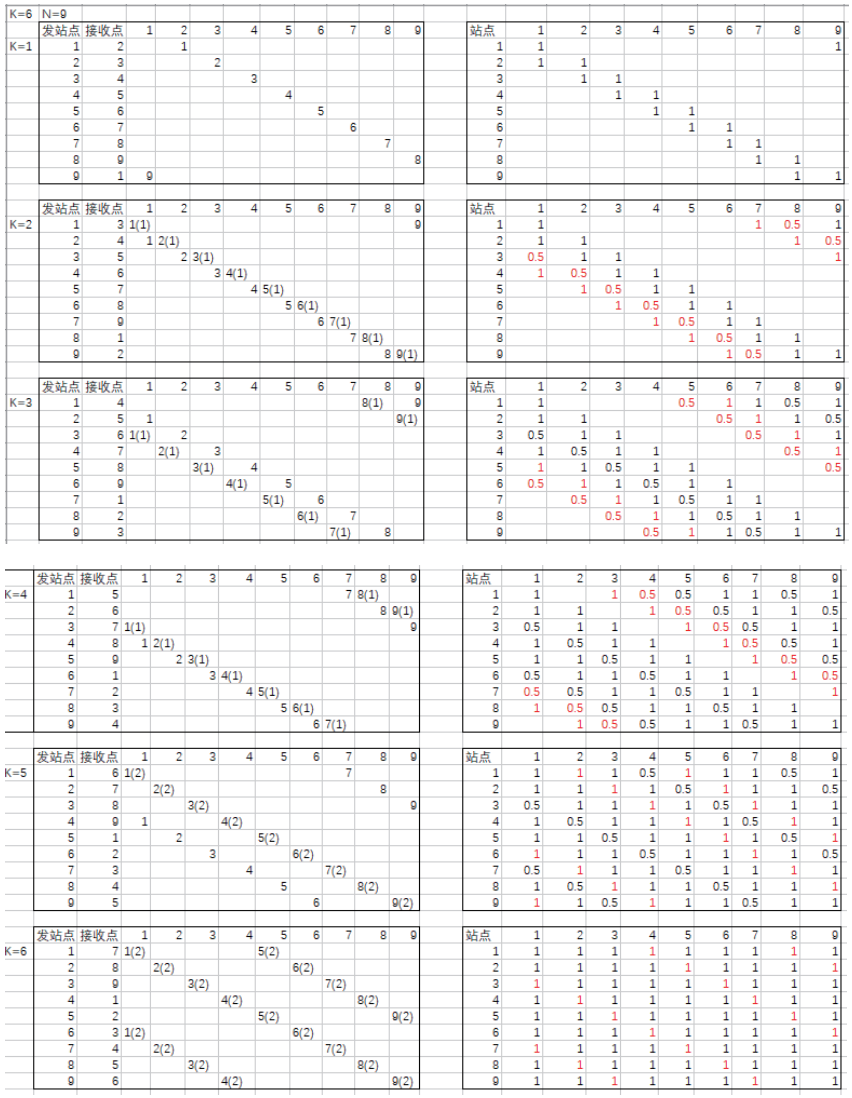


图 3：N=9 各主站点每分钟信息收发和信息含有详表

（三）模型二

结合卫星通讯的实际情况，副站发送信息的成功率为 80%，主站成功接收该分队至少一个副站的气象报文的概率不低于 0.9，根据概率加法公式可以得到：

P（a ∪ b）=P（a）+P（b）−P（ab）=0.8−0.8×0.8=0.96>0.9；即当两个副站向主站发送信息就可以满足条件。又根据 $K=\mathrm{Int}\left(\frac{N-1}{1.5}\right)+1$

容易得到：$N=\mathrm{Int}[(K-1)\times\frac{3}{2}]+1$，

由于增加了副站信息的传输，所以利用这个公式能得到 N 范围。

增加副站发送主站的循环传输模型如图 4（模型二）：以 N=5 为例。

当 K=7，N 的范围为（7，10），根据表上作业调整，得到 Nmax=9

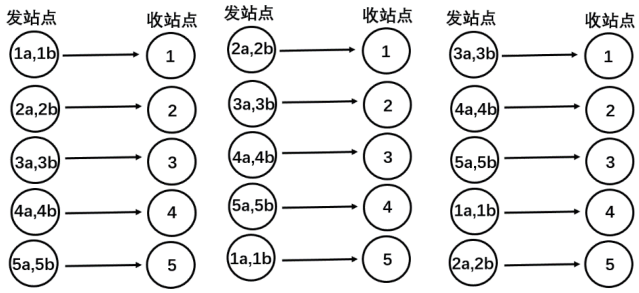
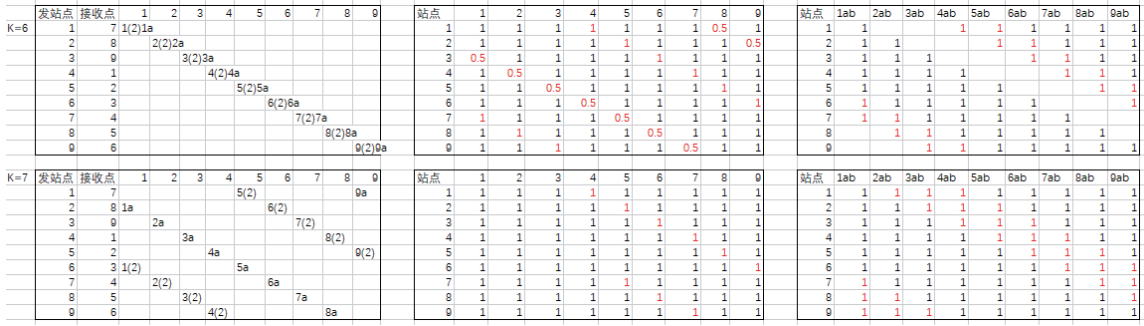


图 4：模型二

由于主站共享气象报文信息的传输方式与问题 1 相同，因此当 K=6 时，主站还能继续发送下半段气象报文信息与其他主站共享接收到的副站信息。当第 7 轮传输时，两个副站同时给主站发送信息，并与主站之间的信息共享同步进行，主站可以 100% 发送信息，最后两轮由主站协助发送时可以只发送 ab 两个副站中的一条信息，满足成功接收每支分队至少一个副站的气象报文。如图 5：



K=6	发站点	接收点	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1	7	1(2)1a								
	2	8		2(2)2a							
	3	9			3(2)3a						
	4	1				4(2)4a					
	5	2					5(2)5a				
	6	3						6(2)6a			
	7	4							7(2)7a		
	8	5								8(2)8a	
	9	6									9(2)9a

站点	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	1	1	1	1	0.5	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	0.5
3	0.5	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	0.5	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	0.5	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	0.5	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	0.5	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	0.5	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	0.5	1	1

站点	1ab	2ab	3ab	4ab	5ab	6ab	7ab	8ab	9ab
1	1			1	1	1	1	1	1
2	1	1		1	1	1	1	1	1
3	1	1	1			1	1	1	1
4	1	1	1	1			1	1	1
5	1	1	1	1	1			1	1
6	1	1	1	1	1	1			1
7	1	1	1	1	1	1	1		
8		1	1	1	1	1	1	1	
9			1	1	1	1	1	1	1

K=7	发站点	接收点	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1	7					5(2)				9a
	2	8	1a					6(2)			
	3	9		2a					7(2)		
	4	1			3a					8(2)	
	5	2				4a					9(2)
	6	3	1(2)				5a				
	7	4		2(2)				6a			
	8	5			3(2)				7a		
	9	6				4(2)				8a	

站点	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1

站点	1ab	2ab	3ab	4ab	5ab	6ab	7ab	8ab	9ab
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1

图 5：K=6，7 时各副站点主站点的信息收发和信息含有详表

能成功接收每支分队至少一个副站的气象报文的主站数为随机变量 x，由题设可知，x~B（9，0.96），所以 E（x）=9×0.96=8.64，在循环传输方案下平均有 8.64 个主站以不低于 90% 的概率接收至少一个副站的气象报文。

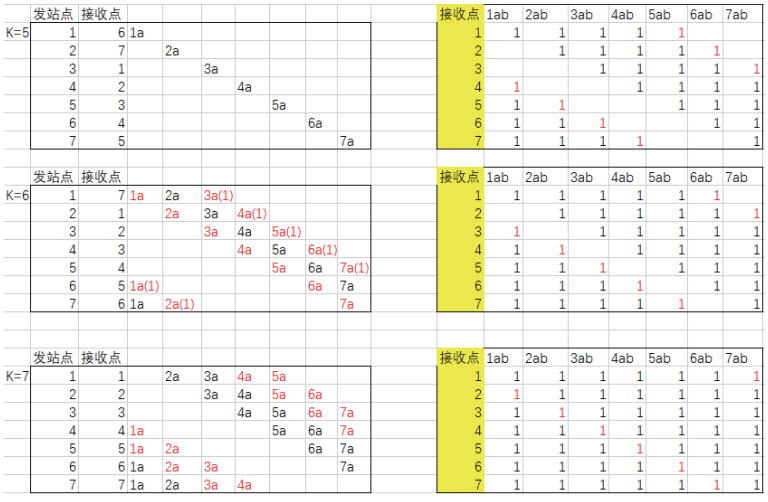
发送气象报文的副站数为变量 y，y~B（18，0.8），所以 E（y）=18×0.8=14.4；在循环传输方案下任一主站平均以不低于 90% 的概率接收 14.4 个副站的气象报文。

（四）模型三

对每支分队，成功接收该分队至少一个副站的气象报文的概率不低于 0.97，而前面两个副站同时发送报文信息，主站成功接收该分队至少一个副站的气象报文的概率为 0.96<0.97，现考虑副站分批发三条信息，求得主站成功接收该分队至少一个副站的气象报文的概率如下：

P（a∪b∪a）=P（a）+P（b）−P（ab）−P（ba）−P（aa）+P（aab）=0.8+0.8+0.8−0.8×0.8+0.8^3=0.992>0.97

因为要增加一次副站信息传输，根据循环传输模型，得出 K=8 时，N 的最大值是 7，此时主站间气象报文信息共享的传输方案与副站气象报文信息的传输方案，将前者按照副站到主站的格式填报，后者按照主站到主站的格式填报。模型三是模型一和二的升级优化，如图 6：



K=5	发站点	接收点							
	1	6	1a						
	2	7		2a					
	3	1			3a				
	4	2				4a			
	5	3					5a		
	6	4						6a	
	7	5							7a

接收点	1ab	2ab	3ab	4ab	5ab	6ab	7ab
1	1	1	1	1	1		
2		1	1	1	1	1	
3			1	1	1	1	1
4	1			1	1	1	1
5	1	1			1	1	1
6	1	1	1			1	1
7	1	1	1	1			1

K=6	发站点	接收点							
	1	7	1a	2a	3a(1)				
	2	1		2a	3a	4a(1)			
	3	2			3a	4a	5a(1)		
	4	3				4a	5a	6a(1)	
	5	4					5a	6a	7a(1)
	6	5	1a(1)					6a	7a
	7	6	1a	2a(1)					7a

接收点	1ab	2ab	3ab	4ab	5ab	6ab	7ab
1	1	1	1	1	1	1	
2		1	1	1	1	1	1
3	1		1	1	1	1	1
4	1	1		1	1	1	1
5	1	1	1		1	1	1
6	1	1	1	1		1	1
7	1	1	1	1	1		1

K=7	发站点	接收点							
	1	1		2a	3a	4a	5a		
	2	2			3a	4a	5a	6a	
	3	3				4a	5a	6a	7a
	4	4	1a				5a	6a	7a
	5	5	1a	2a				6a	7a
	6	6	1a	2a	3a				7a
	7	7	1a	2a	3a	4a			

接收点	1ab	2ab	3ab	4ab	5ab	6ab	7ab
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1

图 6：K=5，6，7 时各副站点主站点的信息收发详表

从第 5 分钟开始，主站协助发送副站信息，副站保持循环传输。但是在最后第 8 分钟，需要主站和副站能衔接上，循环传输模型能方便统筹安排。如图 7。

设能成功接收每支分队至少一个副站的气象报文的主站数为随机变量 x，由题设可知，x~B（7，0.992），所以 E（x）=7×0.992=6.944

在此传输方案下平均有 6.994 个主站以不低于 97% 的概率接收至少一个副站的气象报文。

又设发送气象报文的副站数为变量 y1 和 y2，y1~B（7，0.8），所以 E（x）=7×0.8=5.6

y1~B（7，0.96），所以 E（x）=7×0.96=6.72，E（y1）+E（y2）=5.6+6.72=12.32。

在此传输方案下任一个主站以不低于 97% 的概率平均能成功接收 12.32 个副站的气象报文。

	发站点	接收点							
K=8	1	2	1a(1)		3a	4a	5a	6a	7a
	2	3	1a	2a(2)		4a	5a	6a	7a
	3	4	1a	2a	3a(1)		5a	6a	7a
	4	5	1a	2a	3a	4a(1)		6a	7a
	5	6	1a	2a	3a	4a	5a(1)		7a
	6	7	1a	2a	3a	4a	5a	6a(1)	
	7	1		2a	3a	4a	5a	6a	7a(1)

接收点	1a	2a	3a	4a	5a	6a	7a
1	1a						7a(2)
2	1a(2)	2a					
3		2a(2)	3a				
4			3a(2)	4a			
5				4a(2)	5a		
6					5a(2)	6a	
7						6a(2)	7a

图 7：K=8 时各副站点主站点的信息收发详表

四、教学启示

通过对上述具体建模实例的分析，得到一些在高职院校高数教学中的启示。概况来说为三种方法：（1）扬长避短；（2）有的放矢；（3）与时俱进。

（一）扬长避短

赛题的背景知识是关于气象信息的传输，跟学生的专业几乎毫无关系，所以教师在今后的教学中，可以侧重于培养学生对具体问题的阅读和理解力的提高，同时也要培养学生查阅资料的能力。职业院校的学生在数学理论方面确实有些弱，但实际动手能力还是比较强，包括对 excel 和各种数学软件的操作。题目中难点在读懂约束条件，理解哪些是变量哪些是常量，这里容易把传输信息的数量搞混，增加不必要的变量，导致建模失败。这时对于问题的分析需要通过具体的操作来帮助理解，学生可以试着在 excel 中建立具体的收发矩阵，从而弥补理论推导的欠缺。在教学中，也要多鼓励学生用数学软件求解微积分的题目，特别要鼓励用 python 编程的方式求解实际问题，作为教师需要与时俱进，一精多会，即精通一款常用数学软件，会多款数学软件的简单操作。在教学评价上可以采用多元化评价，比如用数学软件答题也能得到考试成绩。

（二）有的放矢

数学建模的流程包括问题分析、建模、模型求解、模型验证和结果分析，其中重点在于如何选择适当的模型和方法，以获得高效、准确的解决方案。因此，数学建模汇聚了多个学科领域的交叉思想、方法和技术，如微积分、概率论、统计学、最优化、计算机科学等。题目后半部分就用到了概率的部分知识点来验证模型的最优性，虽不难，但对于从未接触过概率论的学生而言，确实是不小的挑战。在平时的教学过程中，由于课时的限制，教师只能教授微积分的知识点，在教学过程中，尽量融入实际问题，学以致用，同时也能稍微进行一些交叉学科的渗透。对于数学特别感兴趣的学生，可以利用选修课的形式，对这些优秀的学生进行集中培训。

（三）与时俱进

通过数学建模的比赛，也为职业院校在高等数学课的教学改革提供了一些与时俱进的思路，可以从以下几个方面入手：

理论知识讲解：首先需要对数学建模的相关理论进行讲解，包括模型构建、数据处理、求解方法等基本概念和方法。

实例分析：通过实际问题案例来引导学生实践操作，让学生在实践运用中不断加深对理论知识的理解和应用能力。

小组合作：学生可以分成小组，针对不同的实际问题进行研究，从而培养学生的团队协作精神和领导能力。

数学思考和探索：鼓励学生在数学思考和探索中发现和解决实际问题，培养学生的创新意识和解决问题的能力。

实践操作：学生需要应用计算机软件对建立的数学模型进行求解，并进行结果分析和评估。通过实践操作，提高学生的实际动手能力。

培养实践能力：学生需要参与实际课题或者企业项目，承担一定的任务或项目，培养其在实践中运用数学建模进行问题解决的能力。

参考文献：

[1] 马卓，侯志相，王世强 . 基于信息保真度的最优信息传输 [J]. 吉林大学学报（信息科学版），2020（6）：14-18.

[2] 万戬，范津铭，王风禄 . 卫星通信系统与卫星通信技术分析 [J]. 神州，2019（13）：56-60.