圆锥曲线参数方程在高中数学解题中的应用

陈　静

（浙江省武义第三中学，浙江 金华 321200）

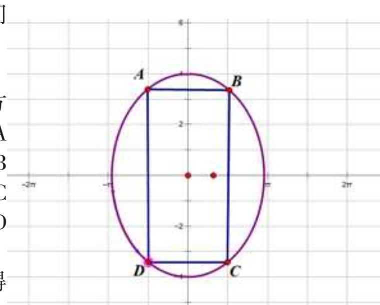
摘要：圆锥曲线是高中数学教学重要的教学内容，对于平面曲线的解析，圆锥曲线方程的具体解题方法在其中发挥了重要作用，其能够全方位体现数形结合的思想。

关键词：圆锥曲线；高中数学；解题方法；具体应用

一、最值问题分析

例题 1：椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，该椭圆内有一个内接长方形 ABCD，长方形 ABCD 的四条边分别与 x 轴和 y 轴平行，求长方形 ABCD 的最大面积和最大周长。

首先，我们要针对题目内容进行梳理，因长方形 ABCD 的四个点都在椭圆上，所以我们可以绘制一个草稿图出来，如右图。



然后从题目当中的方程式展开分析，首先设 A（–a cos θ，b sin θ），B（a cos θ，b sin θ），C（a cos θ，–b sin θ），D（–a cos θ，–b sin θ），同时从题目当中也可以得出来 AB=CD=2a cos θ，BC=AD=2b sin θ，所以，将矩形的面积公式套用到其中就可以得出，S 矩形 ABCD=AB × AD=2a cos θ × 2b sin θ =2ab sin2 θ。

所以，如果 $S_{矩形ABCD}$ 想要得到最大值，sin2 θ 就需要是最大值，从 sin 函数的性质我们可以知道，sin2 θ 的最大值为 1，也就是说 $S_{矩形ABCD}$ 的最大值是 2ab。

之后我们再代入周长 C 的公式，也就是 C 矩形 ABCD=2（AB+AD）=2（2a cos θ +2b sin θ）=4（a cos θ +b sin θ），设一个角 β，a=b sin β，b=a cos β，所以 a cos θ +b sin θ =b sin β cos θ +a cos β sin θ = $4\sqrt{a^2+b^2}$ sin（è + β），sin β = $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，cos β = $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

综上所述，在 sin（θ + β）最大时，C 矩形 ABCD 的值是最大的，也就是 sin（θ + β）=1 的时候，所以 $C_{矩形ABCD}$ 的最大值为 = $\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

在这种题型的解析过程中，我们可以发现虽然看上去是在求最值问题，但是通过计算以后，因为结合数形结合思想，所以还需要应用到三角函数来进行转化。

二、轨迹问题分析

例题 2：已知抛物线 $y^2=2px$（p>0），在抛物线上有两个动点 A 和 B，在直角坐标系当中始终满足 OA 垂直 OB，从上述条件当中求得弦 AB 中点 M 的轨迹方程。

首先要从题目当中方程式进行展开，因为给出的方程式抛物线方程，然后已知 A、B 两点，所以可以将 A 的坐标设为（$2pt^2$，2pt），又因为题目给出了一个条件：OA 与 OB 之间是垂直的，所以根据之前所设的 A 点坐标（$2pt^2$，2pt），又可以得出 B 点坐标（$\frac{2p}{t^2}$，$-\frac{2p}{t}$，又因为中点 M 与弦 AB 之间的关系，所以可以将 M 设为（x，y）。

其中 x 等于 A 点横坐标加上 B 点横坐标的值的一半，y 等于 A 点纵坐标加上 B 点纵坐标的值的一半。可列式得：

$$x=\frac{\frac{2p}{t^2}+2pt^2}{2}=\frac{\frac{2p+2pt^4}{t^2}}{2}=\frac{\frac{1+t^4}{2pt^2}}{2}=\frac{1+t^4}{p^2}=p\left(\frac{1+t^4}{t^2}\right)=p\left(\frac{1}{t^2}+t^2\right)$$

乍一看这个求解 x 的方程式是非常复杂的，但是我们可以先针对其分子进行通分，可以发现，在被 t^2 通分之后还有一个公约数 2p 可以将其作为分母，然后 2p 中的 2 与原本是只能从另外一个 2 实现约分，就可以化简得出一个式子 $\frac{1+t^4}{pt^2}$，这个式子可以先放在这里，等一会就出 y 之后，再看二者之间存在什么样的关系。

$$y=\frac{\frac{-2p}{t}+2pt}{2}=\frac{\frac{-2p+2pt^2}{t}}{2}=\frac{\frac{-1+t^2}{2p}}{2}=\frac{-1+t^2}{pt}=p\left(-\frac{1}{t}+t\right)$$

同样求解 y 的方程式也是相对而言比较复杂的，当分母的两个部分被 t 通分之后，仍然是发现有一个公约数 2p 可以将其作为分母，然后 2p 中的 2 与原本是只能从另外一个 2 实现约分，最终化简得出 $\frac{-1+t^2}{pt}$。

而 y= $\frac{-1+t^2}{p}$ f 与 x= $\frac{1+t^4}{p^2}$ 是有很大的的类似之处的，为了能够更好的求解，所以就会将这两个式子分别转化为 x=p（$\frac{1}{t^2}$ +t^2）和 y=p(–$\frac{1}{t}$ +t)，而这就很容易让学生连想到之前所学的公式：完全平方公式，也就是 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

所以也就可以引导学生运用完全平方公式来进行消 t，找出 x 与 y 之间的关系，

消 t：$\left(-\frac{1}{t}+t\right)2=\frac{1}{t^2}-2+t^2=\left(\frac{1}{t^2}+t2\right)-2$，所以 $\frac{y^2}{p^2}-\frac{x}{p}=-2$

将上面这个式子再次进行化简过后就可以得出 $y^2=p(x-2p)$

从轨迹方程的探索过程中，我们同样也可以发现，圆锥曲线参数方程和几何之间的数形结合应用是非常常见的，但是在列出式子之后，更为重要的是针对数量关系之间的化简。

三、结语

圆锥曲线能够与其他相关的知识点进行综合考察，所以在高中数学当中的应用也相当广泛，教师要向学生展现出圆锥曲线参数方程的这一特性，保证学生能够对过去所学知识进行仔细回忆，从而实现圆锥曲线参数方程的良好应用。

参考文献：

[1] 张启锋 . 基于“主题式”的课堂教学设计——以“圆锥曲线的参数方程复习”为例 [J]. 高中数学教与学，2020（10）：14–16.

[2] 吴明飞 . 立足基础，创新实践，展数学之美——一道圆锥曲线例题方法的再探究 [J]. 数学学习与研究，2020（02）：136，138.

[3] 崔御章 . 圆锥曲线参数方程在高中数学解题中的应用 [J]. 课程教育研究，2019（11）：151–152.

[4] 吴爽 . 浅析圆锥曲线参数方程在高中数学解题中的应用 [J]. 数学学习与研究，2018（15）：140.