

一类广义三参数 Weibull 分布的统计推断

张娟 周艺璇

(四川民族学院, 四川 康定 626001)

摘要: 本文先介绍了 Weibull 分布的单参数型、二参数型、三参数型的常见形式。接着提出一类新的三参数广义 Weibull 分布。验证了它是一个分布并给出了其数理化定义。

关键词: 广义三参数 Weibull; 分布; 统计推断

作为当今科学领域重要的研究内容, 一类广义三参数分布亦是对推动世界经济的关键。该分布理念的提出, 为航空航天、工程和医学等领域的发展起到了十分重要的作用。不仅如此, 它通过自身单调性、连续性等形式能够更好地拟合某些关键的信息数据, 并结合自身函数图像将原本抽象的理论数据变得更加具体化, 使人们利用借助其基本性质来解决多种形式的实际问题。

一、单参数型 Weibull 分布

定义: 若随机变量 X (非负数) 服从分布函数:

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \text{ 其中 } \lambda > 0, x \geq 0$$

则称随机变量 X 服从参数 λ 的 Weibull 分布, 记为 $X \sim W(x, \lambda)$, 其中 λ 为尺度参数 (可以放大或缩小分布密度曲线, 但不影响其进本形状)。

二、二参数 Weibull 分布

定义: 若随机变量 X (非负数) 服从分布函数:

$$F(x) = 1 - \exp[-(\lambda x)^a] \text{ 其中 } a > 0, \lambda > 0, x \geq 0$$

我们则可以认为, 随机变量 X 服从参数 (a, λ) 的 Weibull 分布, 记为 $X \sim W(x; a, \lambda)$ 。

且该分布函数对应的密度函数为: $f(x) = a\lambda (\lambda x)^{a-1} \exp[-(\lambda x)^a]$

其中, a, λ, γ 分别是函数的形状、尺度、位置参数。不同形状参数能够描述出不同的失效机理, 特殊地, 当 $a=1$ 时, $W(x; 1, \lambda)$ 的分布变为以 $\lambda > 0$ 为参数的指数分布 $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$ 。

三、三参数 Weibull 分布

定义: 若随机变量 X (非负数) 服从分布函数:

$$F(x) = 1 - \exp\left\{-\frac{1}{\lambda}(x-\gamma)^a\right\}, x \geq \gamma \geq 0, a, \lambda > 0$$

我们可以认为, 随机变量 X 满足参数 (a, λ, γ) Weibull

的分布, 记为 $X \sim W(x; a, \lambda, \gamma)$ 。

其中, a, λ, γ 分别是函数的形状、尺度、位置参数 (意为最小寿命) 特殊的。当 $\gamma=0$ 时, 变为二参数型; 当 $a=0$ 时, 变为经典的指数分布; 当 $\gamma=0$ 且 $a=0$ 时, 变为单参数型;

四、一类广义三参数 Weibull 分布

若一个函数满足以下基本形式:

$$F(x) = \frac{\exp[(x-\gamma)^m] - 1}{\exp[(x-\gamma)^m] + \beta - 1}$$

且 $m > 0, \beta > 0, x > \gamma > 0$ 时, 称 $F(x; m, \beta, \gamma)$ 是分布函数。下面通过具体推导过程来证明 $F(x; m, \beta, \gamma)$ 是分布函数。

(1) 当 $F(x)$ 分布函数满足单调不减性时

若随机变量 X 的分布函数为 $F(x; m, \beta, \gamma)$, 易知 X 的密度函数

令

$$v(x) = \exp[(x-\gamma)^m] - 1$$

$$u(x) = \exp[(x-\gamma)^m] + \beta - 1$$

则有

$$v'(x) = m(x-\gamma)^{m-1} \exp[(x-\gamma)^m]$$

$$u'(x) = m(x-\gamma)^{m-1} \exp[(x-\gamma)^m]$$

$$f(x) = F'(x) = \frac{m\beta(x-\gamma)^{m-1} \exp[(x-\gamma)^m]}{\{\exp[(x-\gamma)^m] + \beta - 1\}^2}$$

因为 $m > 0, \beta > 0, x > \gamma > 0, x \in (\gamma + \infty)$, 所以 $m\beta(x-\gamma)^{m-1} \exp[(x-\gamma)^m] > 0$, 即 $f(x) = F'(x) > 0$ 在 $(\gamma + \infty)$ 上恒成立。

(2) $F(x)$ 分布满足有界性。

$$\lim_{x \rightarrow \gamma^+} F(x; m, \beta, \gamma) = \lim_{x \rightarrow \gamma^+} \frac{\exp[(x-\gamma)^m] - 1}{\exp[(x-\gamma)^m] + \beta - 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x; m, \beta, \gamma) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp[(x-\gamma)^m] - 1}{\exp[(x-\gamma)^m] + \beta - 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{m(x-\gamma)^{m-1} \exp[(x-\gamma)^m]}{m(x-\gamma)^{m-1} \exp[(x-\gamma)^m]} = 1$$

因此, 对于任意的 $x \in (\gamma + \infty)$, 都有 $0 \leq F(x) \leq 1$ 。

(3) $F(x)$ 满足右连续性。

$F(x)$ 是 x 的右连续函数, 即对于任意的 $x_0 \in (\gamma + \infty)$,

有

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0)$$

即

$$F(x_0+0) = F(x_0)$$

通过单调性、有界性和右连续性这三个基本性质能够准确判断出该函数是否能充当分布函数的充要条件, 因此 $F(x; m, \beta, \gamma)$ 是分布函数。

定义 若随机变量 X 服从分布函数:

$$F(x) = \frac{\exp[(x-\gamma)^m] - 1}{\exp[(x-\gamma)^m] + \beta - 1}$$

其中 $m > 0, \beta > 0, x > \gamma > 0$ 时, 称 $F(x; m, \beta, \gamma)$

则称随机变量 X 服从以 m, β, γ 为参数的广义 Weibull 分布, 记为 $X \sim W(x; m, \beta, \gamma)$ 。

该分布对应的密度函数为

$$f(x) = \frac{m\beta(x-\gamma)^{m-1} \exp[(x-\gamma)^m]}{\{\exp[(x-\gamma)^m] + \beta - 1\}^2}$$

$m > 0, \beta > 0, x > \gamma > 0$

参考文献:

[1] 朱晓阳, 付立愉. 三参数威布尔分布在疲劳寿命数据处理中的应用[J]. 机械强度, 1986(02): 68-74+80.

[2] 茆诗松. 可靠性统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.

基金项目: 本文系四川民族学院校级科研项目(项目编号: ZXYB19009ZB)的阶段性成果。

作者简介:

张娟(1994-), 女, 山西运城人, 四川民族学院专职讲师, 硕士研究生学历, 主要从事概率论与数理统计方向的研究。

周艺璇(1993-), 女, 四川南充人, 四川民族学院助教, 硕士研究生学历, 主要从事代数学方向的研究。



(图文无关)