

CRI 迭代法求解复连续 Sylvester 方程

牟能刚 匡 艳 毛义坪

(重庆对外经贸学院, 重庆 401520)

摘要: 本文针对于非 Hermitian 复对称正定的 Sylvester 矩阵方程, 分析了一类修正的 HSS 迭代法, 在此基础上提出了实部与虚部相结合 (CRI) 的迭代法. 理论分析发现 CRI 迭代法是无条件收敛的, 且迭代矩阵的谱半径的上界比 PMHSS 迭代法的小. 数值试验表明新的迭代算法对于求解大规模连续 Sylvester 方程是有效的.

关键词: Sylvester 方程; 预处理; 数值实验

本文考虑如下的 Sylvester 矩阵方程:

$$AX + XB = F, \quad A \in \mathbb{C}^{m \times m}, \quad B \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad F \in \mathbb{C}^{m \times n}, \quad (1.1)$$

其中 A , B 和 F 均是给定的大规模稀疏复矩阵. 对矩阵 A , B 做如下的分裂, 有

$$A = W + iT, \quad B = U + iV,$$

其中 W , $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$, U , $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是实对称矩阵, $i = \sqrt{-1}$ 是虚数单位. 设 W 是正定矩阵, T , U , V 是半正定矩阵, 若 $T \neq 0$ 则 A 是非 Hermitian 矩阵. 当矩阵 A 和 $-B$ 之间没有相同特征值时, 连续的 Sylvester 矩阵方程有唯一解.

矩阵方程 (1.1) 出现于系统理论、控制论、稳定性分析、复偏微分方程数值解、迭代法求解代数 Riccati 方程等. 方程 (1.1) 数值上等价于 $\tilde{A}x = f$, (1.2)

其中 $\tilde{A} = I \otimes A + B^T \otimes I$, 向量 x 和 f 分别是矩阵 X 和 F 的列拉直向量. $\otimes$ 代表 Kronecker 积. B^T 代表着矩阵 B 的转置. 若是利用直接法求解线性方程组 (1.2), 所需要的计算量和存储空间是巨大的, 从而有许多间接的迭代法 [4-6] 被提出用于求解 (1.2). 就技巧性而言, 白老师的 HSS 迭代法是一个高效方法, 首先对复对称矩阵 A 和 B 进行 Hermitian 和 skew-Hermitian 分裂, 有

$$H(A) = \frac{1}{2}(A + A^*) = W, \quad S(A) = \frac{1}{2}(A - A^*) = iT,$$

$$H(B) = \frac{1}{2}(B + B^*) = U, \quad S(B) = \frac{1}{2}(B - B^*) = iV,$$

其中 A^* 和 B^* 分别代表这矩阵 A 和 B 的共轭转置矩阵. 从而有

$$A = H(A) + S(A) = W + iT, \quad B = H(B) + S(B) = U + iV,$$

由此, 就会有 HSS 迭代法, 即

HSS 迭代法: 任意给定 $X^{(0)} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 由下列迭代公式计算 $X^{(k+1)}$ 直到 $\{X_k\}_0^\infty$ 收敛:

$$\begin{cases} (\alpha I + W)X^{(k+\frac{1}{2})} + X^{(k+\frac{1}{2})}(\beta I + U) = (\alpha I - iT)X^{(k)} + X^{(k)}(\beta I - iV) + F \\ (\alpha I + iT)X^{(k+1)} + X^{(k+1)}(\beta I + iV) = (\alpha I - W)X^{(k+\frac{1}{2})} + X^{(k+\frac{1}{2})}(\beta I - U) + F \end{cases} \quad (1.3)$$

其中 α 和 β 是两个给定的正常数, I 是适当维度的单位矩阵.

注意到 HSS 迭代法的每一步都需要求解一个半步迭代方程, 为了避免在迭代公式 (1.3) 中求解一个复线性方程, 周等人技巧性的提出了一类修正的 HSS 迭代法用于求解 (1.1). 即对 (1.1) 进行等价性的改写为

$$-iAX + X(-iB) = -iF,$$

进一步, 有

$$(T - iW)X + X(V - iU) = -iF,$$

从而写迭代格式, 就有

$$(\alpha I + T)X^{(k+\frac{1}{2})} + X^{(k+\frac{1}{2})}(\beta I + V) = (\alpha I + iW)X^{(k)} + X^{(k)}(\beta I + iU) - iF, \quad (1.4)$$

用 (1.4) 式替换 (1.3) 中的第二式, 得到了 MHSS 迭代法.

MHSS 迭代法: 任意给定 $X^{(0)} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 由下列迭代公式计算 $X^{(k+1)}$ 直到 $\{X_k\}_0^\infty$ 收敛:

$$\begin{cases} (\alpha I + W)X^{(k+\frac{1}{2})} + X^{(k+\frac{1}{2})}(\beta I + U) = (\alpha I - iT)X^{(k)} + X^{(k)}(\beta I - iV) + F \\ (\alpha I + T)X^{(k+1)} + X^{(k+1)}(\beta I + V) = (\alpha I + iW)X^{(k+\frac{1}{2})} + X^{(k+\frac{1}{2})}(\beta I + iU) - iF \end{cases} \quad (1.5)$$

其中 α 和 β 是两个给定的正常数, I 是适当维度的单位矩阵.

预处理是一类加速收敛的有效技巧, 预处理矩阵的选择不同, 可以得到不同的收敛效果. 董等人通过利用不同的实对称正定预处理矩阵 $V_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 和 $V_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 提出了一类 PMHSS 方法用于求解 (1.1).

PMHSS 迭代法: 任意给定 $X^{(0)} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 由下列迭代公式计算 $X^{(k+1)}$ 直到 $\{X_k\}_0^\infty$ 收敛:

$$\begin{cases} (\alpha V_1 + W)X^{(k+\frac{1}{2})} + X^{(k+\frac{1}{2})}(\beta V_2 + U) = (\alpha V_1 - iT)X^{(k)} + X^{(k)}(\beta V_2 - iV) + F \\ (\alpha V_1 + T)X^{(k+1)} + X^{(k+1)}(\beta V_2 + V) = (\alpha V_1 + iW)X^{(k+\frac{1}{2})} + X^{(k+\frac{1}{2})}(\beta V_2 + iU) - iF \end{cases}$$

其中 α 和 β 是两个给定的正常数, V_1 和 V_2 是预先给定的两个对称正定矩阵.

本文将进一步研究 PMHSS 迭代算法, 受到王等人的启发, 提出了 CRI 迭代算法求解矩阵方程 (1.1), 并且分析了 CRI 算法的收敛性质. 最后利用数值试验, 表明新迭代法是行之有效的, 且在合适的参数选取下, 其收敛速率较 PMHSS 算法快.

一、CRI 迭代算法

基于 PMHSS 迭代算法, (1.1) 可改写为如下等价形式:

$$\begin{cases} (\alpha T + W)X + X(\beta V + U) = (\alpha - i)TX + X(\beta - i)V + F \\ (\alpha W + T)X + X(\beta U + V) = (\alpha + i)WX + X(\beta + i)U - iF \end{cases}$$

对任意的 $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, CRI 迭代算法如下:

$$\begin{cases} (\alpha T + W)X^{(k+\frac{1}{2})} + X^{(k+\frac{1}{2})}(\beta V + U) = (\alpha - i)TX^{(k)} + X^{(k)}(\beta - i)V + F \\ (\alpha W + T)X^{(k+1)} + X^{(k+1)}(\beta U + V) = (\alpha + i)WX^{(k+\frac{1}{2})} + X^{(k+\frac{1}{2})}(\beta + i)U - iF \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 α 和 β 是两个正数. 在前面所论述的假设条件下, 可得 $(\alpha T + W)$ 和 $-(\beta V + U)$ 没有相同的特征值. 同理, $(\alpha W + T)$ 和 $-(\beta U + V)$ 也没有相同的特征值. 从而迭代方程 (2.1) 对于任意的右端矩阵有唯一解. 本文仅考虑 $\alpha = \beta$ 的情形, 即

$$\begin{cases} (\alpha T + W)X^{(k+\frac{1}{2})} + X^{(k+\frac{1}{2})}(\alpha V + U) = (\alpha - i)TX^{(k)} + X^{(k)}(\alpha - i)V + F \\ (\alpha W + T)X^{(k+1)} + X^{(k+1)}(\alpha U + V) = (\alpha + i)WX^{(k+\frac{1}{2})} + X^{(k+\frac{1}{2})}(\alpha + i)U - iF \end{cases} \quad (2.2)$$

对迭代格式 (2.2) 向量化后, 有

$$\text{vec}(X^{(k+1)}) = M(\alpha)\text{vec}(X^{(k)}) + N(\alpha)^{-1}\text{vec}(F),$$

其中

$$\begin{aligned} M(\alpha) &= (\alpha^2 + 1)(\alpha H + K)^{-1} H(\alpha K + H)^{-1} K, \\ N(\alpha)^{-1} &= \alpha(\alpha H + K)^{-1} (H - iK)(\alpha K + H)^{-1}, \\ H &= I \otimes W + U^T \otimes I, \quad K = I \otimes T + V^T \otimes I. \end{aligned} \quad (2.3)$$

显然 $M(\alpha)$ 是 CRI 迭代算法的迭代矩阵, 于是 CRI 迭代算法收敛当且仅当 $\rho(M(\alpha)) < 1$. 又由于矩阵 W, T, U, V 是对称矩阵, 根据 Kronecker 积的性质可知 H, K 均是对称的.

若令

$$E(\alpha) = N(\alpha) - \tilde{A} = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} (\alpha K + H)^{-1} H(\alpha K + H)^{-1} K.$$

则

$$\tilde{A} = N(\alpha) - E(\alpha) \quad (2.4)$$

定义了稀疏矩阵 $\tilde{A}$ 的一个分裂, 且可知 $M(\alpha) = N(\alpha)^{-1} E(\alpha)$ 是 CRI 迭代法的迭代矩阵, 其中 $N(\alpha)$ 常被用于预处理子加速收敛. 接下来, 将讨论 $\tilde{A}$ 是非奇异的, 即

$$\text{null}(H) \cap \text{null}(K) = \{0\}$$

和 W 和 H 是对称半正定矩阵, 这也意味着不需要对矩阵 W 强加正定这一限制条件.

引理 2.1 令 H 和 K 分别如 (2.3) 中定义, $J = H + K$, 则 $\text{null}(H) \cap \text{null}(K) = \{J\}$.

证明: 首先, 若 $z \in \text{null}(H) \cap \text{null}(K)$, 即 $H z = 0, K z = 0$, 此时有

$J z = (H + K) z = H z + K z = 0$, 即 $z \in \text{null}(J)$ (或 $\text{null}(H) \cap \text{null}(K) \subseteq \{J\}$). 再者, 若 $0 \neq z \in \text{null}(J)$, 则 $J z = (H + K) z = 0$, 即

$$z^T J z = z^T (H + K) z = z^T H z + z^T K z = 0.$$

又由于矩阵 H 和 K 均是对称半正定矩阵, 则 $z^T H z = z^T K z = 0$, 即 $H z = K z = 0$. 从而 $z \in \text{null}(H) \cap \text{null}(K)$ (或 $\text{null}(H) \cap \text{null}(K) \supseteq \text{null}(J)$).

综上, 引理得证.

当系数矩阵 $\tilde{A}$ 是非奇异时, 可知矩阵 J 是正定的. 同时, $\tilde{A}$ 是非奇异也意味着 $\text{null}(H) \cap \text{null}(K) = \{0\}$. 为了进一步研究 CRI 迭代法的性质, 还需要以下重要引理.

引理 2.2 令 H 和 K 分别如 (2.3) 中定义, 且满足 $\text{null}(H) \cap \text{null}(K) = \{0\}$, 则存在非奇异矩阵 $P \in R^{mn \times mn}$, 使得

$$H = P^T \Lambda P \text{ 和 } K = P^T \tilde{\Lambda} P. \quad (2.5)$$

其中

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{mn}), \quad \tilde{\Lambda} = \text{diag}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_{mn}),$$

且 $\lambda_j, \tilde{\lambda}_j$ 满足

$$\lambda_j + \tilde{\lambda}_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad \tilde{\lambda}_j \geq 0, \quad (j = 1, 2, \dots, mn). \quad (2.6)$$

证明: 由引理 2.1, 有 $J = H + K$ 是对称正定矩阵. 于是存在非奇异矩阵 S , 使得 $S^T J S = I$. 由于 $S^T H S$ 是对称半正定矩阵, 且 $S^T H S \leq I$. 则存在正交矩阵 Q 使得

$$\Lambda = Q S^T H S Q^T = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{mn}),$$

其中 $\lambda_j \in [0, 1]$ ($j = 1, 2, \dots, mn$). 又由于

$$I = Q S^T J S Q^T = Q S^T H S Q^T + Q S^T K S Q^T = \Lambda + Q S^T K S Q^T,$$

可知 $Q S^T K S Q^T$ 是对角矩阵. 记

$$\tilde{\Lambda} = Q S^T K S Q^T = I - \Lambda = \text{diag}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_{mn}),$$

令 $P = Q S^{-1}$, 则 (2.5), (2.6) 式成立.

接下来, 应用上述两个引理, 得到 CRI 迭代法的收敛性定理.

定理 2.3 令 $\tilde{A} = H + iK \in C^{mn \times mn}$ 非奇异, H 和 K 是 $C^{mn \times mn}$ 中的对称半正定矩阵, 参数 $\alpha > 0$ 是给定的实数. 则 CRI 迭代算法的谱半径当 $\lambda_j \tilde{\lambda}_j \neq 0$ ($j = 1, 2, \dots, mn$) 时满足

$$\rho(M(\alpha)) \leq \sigma(\alpha) = \frac{\alpha^2 + 1}{(\alpha + 1)^2} < 1, \quad \forall \alpha > 0. \quad (2.7)$$

CRI 迭代法在 $\lambda_j \tilde{\lambda}_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, mn$) 时仅需 1 步迭代就可收敛. 于是, 通过 CRI 迭代算法求解线性方程组 (1.1), 对任意初值都可得到其唯一解 X^* .

证明: 由于 H 和 K 是半正定矩阵, 且满足 $\text{null}(H) \cap \text{null}(K) = \{0\}$ 由引理 2.2 的结论, 即存在非奇异矩阵 P 使得 (2.5), (2.6) 式成立. 从而有

$$M(\alpha) = (\alpha + 1)^2 (\alpha H + K)^{-1} H(\alpha K + H)^{-1} K = (\alpha + 1)^2 P^{-1} (\alpha \Lambda + \tilde{\Lambda})^{-1} \Lambda (\alpha \tilde{\Lambda} + \Lambda)^{-1} \tilde{\Lambda} P.$$

即 $M(\alpha)$ 相似于矩阵

$$G(\alpha) = (\alpha + 1)^2 (\alpha \Lambda + \tilde{\Lambda})^{-1} \Lambda (\alpha \tilde{\Lambda} + \Lambda)^{-1} \tilde{\Lambda}.$$

由于相似矩阵的特征值相同, 从而有

$$\begin{aligned} \rho(M(\alpha)) &= \rho(G(\alpha)) = \rho((\alpha + 1)^2 (\alpha \Lambda + \tilde{\Lambda})^{-1} \Lambda (\alpha \tilde{\Lambda} + \Lambda)^{-1} \tilde{\Lambda}) \\ &= \max_{1 \leq j \leq mn} \left\{ \frac{(\alpha^2 + 1) \lambda_j \tilde{\lambda}_j}{(\alpha \lambda_j + \tilde{\lambda}_j)(\alpha \tilde{\lambda}_j + \lambda_j)} \right\} = \max_{1 \leq j \leq mn} \left\{ \frac{(\alpha^2 + 1) \lambda_j \tilde{\lambda}_j}{(\alpha^2 + 1) \lambda_j \tilde{\lambda}_j + \alpha(\lambda_j^2 + \tilde{\lambda}_j^2)} \right\} \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq mn} \left\{ \frac{(\alpha^2 + 1) \lambda_j \tilde{\lambda}_j}{(\alpha^2 + 1) \lambda_j \tilde{\lambda}_j + 2\alpha \lambda_j \tilde{\lambda}_j} \right\}. \end{aligned}$$

从上式可以看出, 当 $\lambda_j \tilde{\lambda}_j = 0$ 时, $\rho(M(\alpha)) = 0$, 即 CRI 迭代法仅需 1 步可得到其精确解. 当 $\lambda_j \tilde{\lambda}_j \neq 0$ 时, 谱半径满足

$$\rho(M(\alpha)) \leq \sigma(\alpha) = \frac{\alpha^2 + 1}{(\alpha + 1)^2} < 1, \quad \forall \alpha > 0.$$

定理得证.

为了说明 CRI 迭代算法优于 PMHSS 迭代算法, 需要讨论和比较两者迭代算法中迭代矩阵谱半径的大小.

二、CRI 算法和 PMHSS 算法的比较

本节将讨论 PMHSS 算法和 CRI 算法中谱半径的大小关系. 董等人已经计算出 PMHSS 算法中迭代矩阵的谱半径的界为

$$\tilde{\sigma}(\alpha) = \max_{\bar{\mu}_j \in \text{sp}(\bar{K}^{-1} \bar{H})} \frac{\sqrt{\alpha^2 + \bar{\mu}_j^2}}{\alpha + \bar{\mu}_j} \cdot \max_{\bar{\gamma}_j \in \text{sp}(\bar{K}^{-1} \bar{D})} \frac{\sqrt{\alpha^2 + \bar{\gamma}_j^2}}{\alpha + \bar{\gamma}_j},$$

其中 $K = (I \otimes V_1 + V_2^T \otimes I)$, $\bar{H} = (I \otimes W + U^T \otimes I)$,

$\bar{D} = (I \otimes T + V^T \otimes I)$.

进一步, 当 $V_1 = W, V_2 = U$ 时, 有

$$\rho(L(\alpha)) \leq \tilde{\sigma}(\alpha) = \frac{\sqrt{\alpha^2 + 1}}{\alpha + 1} < 1. \quad (3.1)$$

此处

$$L(\alpha) = \frac{\alpha + i}{\alpha + 1} (\alpha H + K)^{-1} (\alpha H - iK) \quad (3.2)$$

是在 PMHSS 迭代法中的迭代矩阵.

推论 3.1 令 $\tilde{A} = H + iK \in C^{mn \times mn}$, H 和 K 是 $C^{mn \times mn}$ 中的对称半正定矩阵且满足 $\text{null}(H) \cap \text{null}(K) = \{0\}$, α 是正实数. 则 CRI 迭代法中迭代矩阵的谱半径上界比 PMHSS 迭代法中迭代矩阵的谱半径上界小.

证明: 由 (3.1) 可知, PMHSS 迭代法中迭代矩阵的谱半径上界为

$$\tilde{\sigma}(\alpha) \equiv \frac{\sqrt{\alpha^2+1}}{\alpha+1} < 1.$$

由 (2.7) 式, 可知 CRI 迭代法中迭代矩阵的谱半径上界为

$$\sigma(\alpha) \equiv \frac{\alpha^2+1}{(\alpha+1)^2} < 1.$$

两者之间满足

$$0 < \sigma(\alpha) \equiv \frac{\alpha^2+1}{(\alpha+1)^2} < \frac{\sqrt{\alpha^2+1}}{\alpha+1} = \tilde{\sigma}(\alpha) < 1.$$

即推论成立.

由于 PMHSS 迭代法是将 $V_1=W$ 和 $V_2=U$ 作为预处理矩阵, 且在实际运算中令参数 $\alpha=1$, 这意味着此时算法为无参数迭代算法. $\alpha^*=1$ 也是在 $V_1=W$ 和 $V_2=U$ 极小化 $\sigma(\alpha)$ 和 $\tilde{\sigma}(\alpha)$ 中产生的最优参数. 由引理 2.2, 可得下列关于 PMHSS 迭代法的重要引理.

引理 3.2 令 $\tilde{A}=H+iK \in C^{m \times m}$, H 和 K 是 $C^{m \times m}$ 中的对称半正定矩阵且满足 $\text{null}(H) \cap \text{null}(K) = \{0\}$, $\alpha=1$. 则在 $V_1=W$ 和 $V_2=U$ 时, PMHSS 迭代法的谱半径满足

$$\frac{1}{2} \leq \rho(L(1)) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

证明: 结合 (3.2) 式和引理 2.2, 当 $\alpha=1$ 时, 有

$$L(1) = \frac{1+i}{2}(H+K)^{-1}(H-iK) = \frac{1+i}{2}P^{-1}(\Lambda+\tilde{\Lambda})^{-1}(\Lambda-i\tilde{\Lambda})P.$$

这意味着 $L(1)$ 和 $\tilde{L} = \frac{1+i}{2}(\Lambda+\tilde{\Lambda})^{-1}(\Lambda-i\tilde{\Lambda})$ 相似, 则有

$$\begin{aligned} \rho(L(1)) &= \frac{1+i}{2} |\rho((\Lambda+\tilde{\Lambda})^{-1}(\Lambda-i\tilde{\Lambda}))| = \frac{\sqrt{2}}{2} \max_{1 \leq j \leq mn} \left\{ \left| \frac{\lambda_j - i\tilde{\lambda}_j}{\lambda_j + \tilde{\lambda}_j} \right| \right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \max_{1 \leq j \leq mn} \left\{ \left| \frac{\sqrt{\lambda_j^2 + \tilde{\lambda}_j^2}}{\lambda_j + \tilde{\lambda}_j} \right| \right\}^{\lambda_j + \tilde{\lambda}_j = 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \max_{1 \leq j \leq mn} \left\{ \sqrt{\lambda_j^2 + \tilde{\lambda}_j^2} \right\} \end{aligned}$$

利用不等式 $\frac{a+b}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{a^2+b^2} \leq a+b (a, b \geq 0)$ 和引理 2.2, 有

$$\frac{1}{2} \leq \rho(L(1)) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

引理得证.

由引理 3.2 可知, PMHSS 迭代法的谱半径聚集于以 1 为心,

内圆半径为 $\frac{1}{2}$, 外圆半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的圆环内. 利用定理 2.3, 有

$\rho(M(1)) \leq \sigma(1) \equiv \frac{1}{2}$. 于是有下列关于 PMHSS 迭代法和 CRI 迭代法的比较定理.

定理 3.2 令 $\tilde{A}=H+iK \in C^{m \times m}$, H 和 K 是 $C^{m \times m}$ 中的对称半正定矩阵且满足 $\text{null}(H) \cap \text{null}(K) = \{0\}$, $\alpha=1$. 则 CRI 迭代法中迭代矩阵的谱半径比 PMHSS 迭代法中的谱半径小.

证明: 利用定理 2.3 和引理 3.2, 有

$$0 \leq \rho(M(1)) \leq \frac{1}{2} \leq \rho(L(1)) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

定理得证.

接下来, 讨论预处理矩阵 $N(\alpha)^{-1}\tilde{A}$ 在复平面的谱分布情况. 特殊地, 令 $\alpha=1$, 就有

$$N(1)^{-1} = (H+K)^{-1}(H-iK)(K+H)^{-1}.$$

于是有如下定理.

定理 3.3 令 $\tilde{A}=H+iK \in C^{m \times m}$, H 和 K 是 $C^{m \times m}$ 中的对称半正定矩阵且满足 $\text{null}(H) \cap \text{null}(K) = \{0\}$, $\alpha=1$. 则预处理矩阵

$N(\alpha)^{-1}\tilde{A}$ 的特征值满足

$$|\lambda(N(1)^{-1}\tilde{A}) - 1| \leq \frac{1}{2}.$$

或等价的叙述为: 预处理矩阵 $N(\alpha)^{-1}\tilde{A}$ 的特征值聚集在以 1 为心, $\frac{1}{2}$ 为半径的圆内.

证明: 由 (2.4) 式和 $M(\alpha) = N(\alpha)^{-1}E(\alpha)$, 有

$$N(1)^{-1}\tilde{A} = N(1)^{-1}(N(1) - E(1)) = I - M(1).$$

当 $\alpha=1$ 时, 就有 $\lambda(N(1)^{-1}\tilde{A}) = 1 - \lambda(M(1))$, 进一步, 由定理 2.3, 有

$$\rho(M(1)) \leq \sigma(1) \equiv \frac{1}{2}$$

$$\text{或 } |\lambda(M(1))| \leq \frac{1}{2}. \text{ 于是有 } |\lambda(N(1)^{-1}\tilde{A}) - 1| \leq \frac{1}{2}.$$

推论 3.4 令 $\tilde{A}=H+iK \in C^{m \times m}$, H 和 K 是 $C^{m \times m}$ 中的对称半正定矩阵且满足 $\text{null}(H) \cap \text{null}(K) = \{0\}$, $\alpha=1$. 则 CRI 迭代法的预处理矩阵的谱半径比 PMHSS 迭代法的谱半径更加聚集.

三、数值实验

本节将给出 1 个数值试验, 以此说明 CRI 迭代算法求解 Sylvester 方程 (1.1) 的有效性, 用符号 "IT" 和 "CPU" 分别代替迭代次数和运行所用时间. 用 "RES" 代表残差, 计算公式为

$$RES = \|F - AX^{(k)} - X^{(k)}B\|_2.$$

在实际计算中, 所有的迭代从初值为 0 开始, 且迭代的终止准则为当前迭代满足

$$ERR = \frac{RES^{(k)}}{RES^{(0)}} \leq 10^{-6}.$$

或者迭代次数达到预设最大迭代次数 $k_{\max}$.

例: 考虑如下结构的复对称连续 Sylvester 方程,

$$A = W + iT, \quad B = U + iV = 3W + 5iT, \quad F = iK,$$

其中 $W = K + (3 - \sqrt{3})(m-1)I$, $T = K + (3 + \sqrt{3})(m-1)I$, 矩阵 $K = I \otimes V_m + V_m \otimes I$, $V_m = (m+1)^2 \text{tridiag}(-1, 2, -1) \in R^{m \times m}$, 于是 K 是一个 $n \times n (n = m^2)$ 的块三角矩阵.

表 1 中列出了由 MHSS、PMHSS 和 CRI 迭代算法求解复对称连续 Sylvester 方程的结果, 包含了迭代次数 "IT"、计算时间 "CPU" (单位: 秒) 和相对残差 "ERR". 由表 1, 可以看出 CRI 迭代算法在迭代次数和计算时间上都优于 MHSS 和 PMHSS 算法. 为了可视化的比较三者间的收敛速率, 图 1 画出了相对残差图. 容易看出, CRI 迭代算法的收敛速率较快于 MHSS 算法和 PMHSS 算法. 同时, 在图 2 中给出了预处理矩阵的特征值分布, 可以明显地看出两者之间的分布范围, 由此也说明了 CRI 迭代算法是高效的.

表 1 MHSS、PMHSS 和 CRI 迭代法数值结果.

n×n	Method	α_{exp}	IT	CPU	ERR
4×4	MHSS	95	19	0.0063	6.8844e-06
	PMHSS	1	18	0.0036	7.4511e-06
	CRI	1	15	0.0029	9.1408e-06
9×9	MHSS	150	20	0.0068	8.4633e-06
	PMHSS	1	18	0.0105	6.7029e-06
	CRI	1	16	0.0089	5.2387e-06
16×16	MHSS	243	20	0.0345	8.7995e-06
	PMHSS	1	18	0.0327	6.3685e-06
	CRI	1	16	0.0334	5.8068e-06

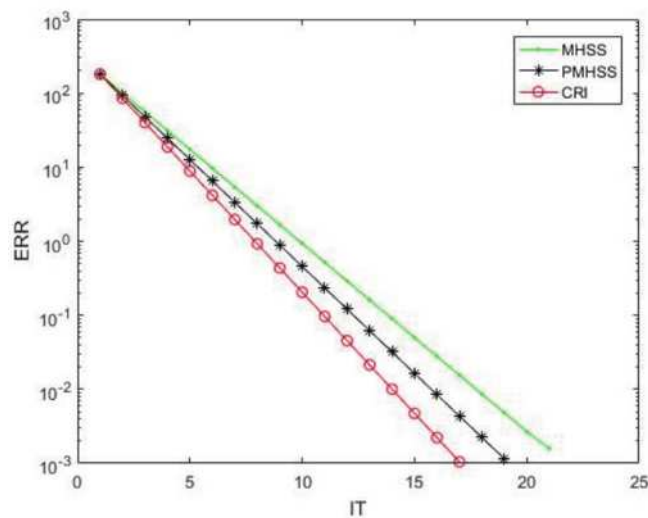


图1 当迭代法收敛速率比较

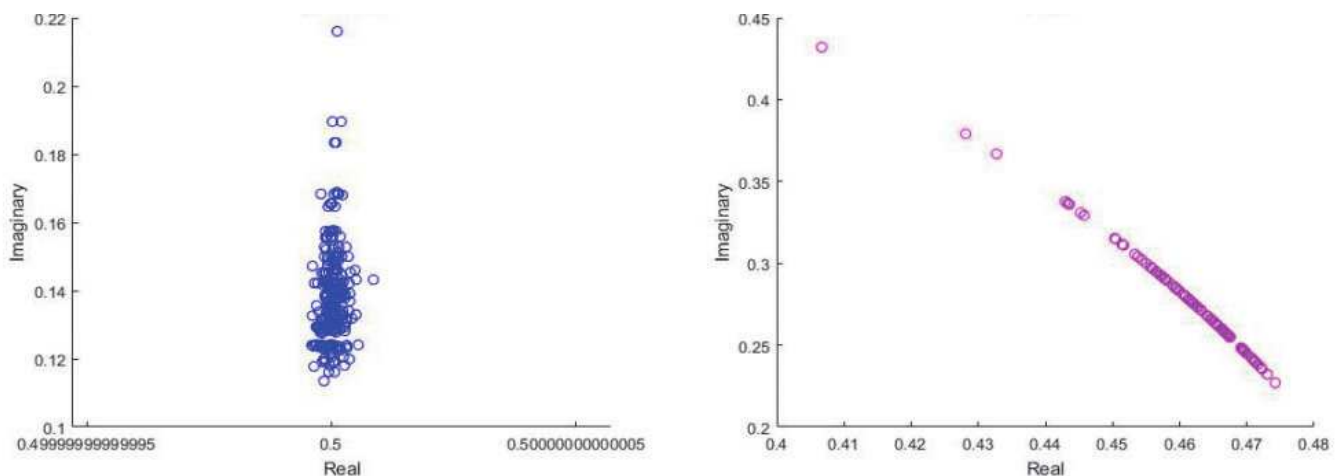


图2 PMHSS 迭代法和预处理的 CRI 迭代法的特征值分布

四、结语

本文针对复对称连续的 Sylvester 方程 (1.1), 提出了一类有效的迭代法—CRI 迭代法. 文中分析了 CRI 迭代算法的收敛性质, 深度讨论了算法的有效性. 本文在理论上证明了 CRI 迭代算法的收敛因子和迭代矩阵谱半径的上界是小于 PMHSS 算法的, 以此说明 CRI 迭代算法的收敛速率是较优的. 数值实验结果也表明 CRI 迭代法是一类高效的算法.

参考文献:

- [1] R.A.Horn, C.R.Johnson, Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [2] B.Zhou, J.Lam, G.-R.Duan, Convergence of gradient-based iterative solution of the coupled Markovian jump Lyapunov equations, Computers and Mathematics with Applications 56 (12) (2008) 3070-3078.
- [3] A.-G.Wu, G.Feng, G.-R.Duan, W.-Q.Liu, Iterative solutions to the Kalman-Yakubovich-conjugate matrix equation, Applied Mathematics and Computation 217 (9) (2011) 4427-4438.
- [4] Z.-Z.Bai, On Hermitian and skew-Hermitian splitting

iteration methods for continuous Sylvester equations, J.Comput. Math.29 (2011) 185-198.12

- [5] Z.-Z.Bai, G.H.Golub, M.K.Ng, Hermitian and skew-Hermitian splitting methods for non-Hermitian positive definite linear systems, SIAM J.Matrix Anal.Appl.24 (2003) 603-626.
- [6] G.H.Golub, S.G.Nash, C.F.V.Loan, A Hessenberg-schur method for the problem $AX + XB = C$, IEEE Trans.Autom.Control 24 (1979) 909-913.
- [7] D.-M.Zhou, G.-L.Chen, Q.-Y.Cai, On modified HSS iteration methods for continuous Sylvester equations, Comput.Math. Appl 325 (2017) 188-197.
- [8] Y.-X.Dong, C.-Q.Gu, On PMHSS iteration methods for continuous Sylvester equations, J.Comput.Math.5 (2017) 600-619.
- [9] T.Wang, Q.-Q.Zheng, L.-Z.Lu, A new iteration method for a class of complex symmetric linear systems, J.Comput.Appl. Math.325 (2017) 188-197.

项目名称: 基于 Kirsch 算子的多聚焦图像融合, 项目编号: KYKJ202002.