

基于匈牙利算法的教学任务指派问题研究

刘 瑞 惠小静

(延安大学数学与计算机科学学院, 陕西 延安 716000)

摘要: 在学校的日常教学工作中, 教学任务的指派是非常重要的环节. 本文首先通过对教学任务影响因素的分析, 发现其主要受教师对课程熟悉度、学生满意度、教师的教学时长以及教师专业知识能力四个因素的影响; 其次, 运用数学建模的思想, 将实际教学中遇到的教学任务分配问题转化成指派问题的优化模型. 最后, 利用匈牙利算法在多种因素的影响下得出最优化的教学任务分配方案, 使得教学任务分配更加科学高效, 客观合理, 最大程度上发挥每位教师的自身优势, 有效利用教育资源, 提高教学效率, 确保教学质量.

关键词: 教学任务; 匈牙利算法; 任务指派问题

随着现代社会的快速发展, 对高质量人才的需要也意味着对学校教育也提出了更高质量的要求. 为了进一步培养学生的积极性, 提升学生的综合能力, 提高教学质量, 使学生能够适应未来社会的发展, 教学质量得紧跟时代步伐. 那么对于学校来说, 教学任务的有效完成是保证教学质量的根本前提, 则教学任务指派问题就显得尤为重要.

教学就是根据国家对培养人才的总要求, 在一定的环境下, 以教师与学生之间交流和对话为媒介, 促进学生身心发展的实践活动. 教学任务是指教师根据国家的教育目的, 培养学生学习基础知识和基本能力, 并发展学生的认知能力和道德品质.

教学任务为教师的日常教学活动提供了方向, 教学任务是否有效完成则离不开教学任务的合理指派. 传统的教学任务分配模式则是为了完成国家规定的教学目标, 将教学计划单方面生硬地指派给老师, 导致老师只是机械性地为了完成教学任务而教学, 而教学能力优秀的教师选择的并不是自己最适合和最擅长的课程, 往往出现事与愿违的结果, 在一定程度上属于教育资源的不合理配置. 长此以往, 既不能使每位教师最大限度地发挥自己的优势, 又会对教师工作积极性产生消极影响, 进而影响教学质量.

科学的教学任务分配模式应是以最大限度地提高教师的整体教学水平为指导思想, 以教学能力优秀的教师为主, 尽可能地让每一位老师担任他们最适合、最擅长的课程, 把每一位老师都分配到最合适的岗位上去.

如果出现多位老师都能担任某一项教学任务, 那就优中选优, 让最优秀的人去担任最合适的课程, 使教育资源的分配合理化, 最大程度地发挥不同教师的优势, 提高教学质量.

教学任务指派问题是一个需要多角度考虑不同方面因素的决策问题. 因此, 科学地、客观地、精确地、合理地将教学任务分配给不同的教师, 是提高教学质量的有效途径, 尽力做到让最适合的教师去担任最合适的课程, 是我们一直孜孜追求的目标.

一、指派问题

指派问题一般可以描述为: 现有 m 项工作, 有 n 个人可供分配, 但每个人擅长的方面不同, 故完成不同类别工作的效率也不同, 如何把工作分配给合适的人去完成, 而使得最终能够高效率地完成所有工作或完成所有工作所消耗的时间最短. 用一句话来总结指派问题则为“派最合适的人去做最合适的事”.

当 $n = m$ 时, 即工作数量和可分配的人数相等, 为平衡状态下的标准指派问题; 当 $n \neq m$ 时, 即工作数量和可分配的人数不相等, 为非平衡状态下的指派问题.

指派问题属于特殊的 0-1 规划或运输问题. 整数线性规划问题的解决方法有如下: 穷举法、隐枚举法、分支定界法、割平面法、匈牙利法等. 匈牙利法是解决指派问题最广泛最有效的方法.

二、建立任务指派问题模型

(一) 问题描述

从 20 世纪 50 年代初匈牙利算法提出以来, 科学家们对指派问题的研究从未停止, 开发出了大量的求指派问题的算法. 其中任务分配问题的求解是应用最广泛的匈牙利算法由匈牙利数学家狄·康尼格首先提出的, 经过了库恩、埃德蒙兹等好几代人的努力, 演变成了现在我们看到的匈牙利法, 用于指派问题的求解. 它的基本原理是任意地从效益矩阵 C 的行或列中, 加上或减去一个常数, 得到不同行和列中至少有一个零元素, 从而得出最理想的分配方案.

在教学任务指派过程中, 为了使教学质量达到最优, 需要考虑到教师对课程的熟悉程度, 学生的接受程度, 教学时间等多方面因素的综合优化决策问题, 任何一个影响因素的改变, 都会对分配结果产生影响, 正所谓: “失之毫厘, 差之千里.” 则该问题可叙述为:

假设一所学校有 n 名不同学科的老师, 共教授 m 门课程. 已知 n 名老师对 m 门课程的熟悉程度矩阵为 S , 学生对老师授课方式的接受程度矩阵为 R , n 名老师的教学课时的最大限度矩阵为 T , 老师的职业能力 K , 试问如何安排课表使得教学质量效果达到最大?

(二) 建立数学模型

教学任务指派问题主要涉及老师对课程的熟悉程度、学生对老师授课方式的熟悉程度、老师的教学时长以及教师专业知识能力四个影响因素, 在分析四个影响因素的基础上运用匈牙利算法找出合适的分配方案.

因此, 本问题选择四个影响因素比值的方法综合表示价值矩阵 C 的元素:

C_{ij} 值越大, 则表明第 i 位老师更适合教授第 j 门课程. S_{ij} 值越大, 表明第 i 位老师对第 j 门课程更熟悉;

R_i 值越大, 表明学生对第 i 位老师的授课方式接受程度越高;

T_j 值越大, 表明第 i 名老师的教学课时越长;

K_j 值越大, 表明第 i 位老师关于第 j 门课程的职业能力越高. C_{ij} 值与 S_{ij} 、 R_i 、 K_j 成正比, 与 T_j 成反比, 表达式如下

$$C_{ij} = \frac{S_{ij} k_j R_i}{T_j} \quad (2-1)$$

对于高校教师我们可以引进竞争机制, 提高教学水平, 教师之间的竞争可以考虑首位竞争制, 对所有教师求解 C_{ij} , 对 C_{ij} 按值由高到低排序, 根据 C 进行课程指派. 因此, 模型的目标方程为目标模型方程为

$$\max A = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n C_{ij} X_{ij}, \quad (2-2)$$

其中目标函数的系数, $C_{ij} \geq 0 (i, j = 0, 1, 2, 3 \dots n)$, $X_{ij} = 0, 1$.

约束条件为:

1. n 是完成教学任务的来自不同学科的老师数量, m 是教学课程的数量, i 表示老师, j 表示教学课程;

2. S 表示老师对教学课程的熟悉程度, 由学生成绩, 教研组长综合评定, 值越高, 则表明越熟悉擅长;

3. R 学生对老师授课方式的接受程度, 由历届学生打分评定, 值越高, 则表明老师越受欢迎;

4. K 表示老师自身的职业能力, 由学校每年设考试综合评定, 值越高, 则表明自身能力越 T 强;

5. T 表示老师的教学时长, 由老师自身情况, 所担任的科研任务和外出学习确定, 值越大, 则表明老师的教学时长越长, 课程任务越重;

6. C 称为系数矩阵或效益矩阵。

(三) 模型优化

1. 匈牙利算法是具有以下三个条件的分配问题模型

(1) 目标函数要求为 \min ;

(2) 效益矩阵为 n 阶方阵;

(3) 矩阵中所有元素非负, 且均为常数。

满足这三个条件的分配问题则是标准分配问题。

2. 匈牙利算法一般只能直接用于解决标准分配问题, 而实际应用的模型中更多遇到的是非标准分配问题, 再使用此方法之前要把分配问题标准化。

匈牙利算法仅限于对极小化问题的研究, 至于极大化问题,

可转化为等价目标函数。

$$\min A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (-C_{ij}) X_{ij}, \quad (2-3)$$

这时候可做一新矩阵, 使每个元素为

$$C'_{ij} = M - C_{ij}, \quad (2-4)$$

其中, M 是足够大的常数 (例如可以取 C_{ij} 中的最大的元素作为 M)。这是 $C'_{ij} \geq 0$, 符合匈牙利算法的要求, 则目标函数可化为

$$\min A' = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n C'_{ij} X_{ij}, \quad (2-5)$$

(1) 当 $n > m$ 时, 即“人多活少”的现象, 可虚增 $n - m$ 门课程, 使老师数和课程数门数相等, 这样就使系数矩阵增加了 $n - m$ 列, 构建了新的平衡矩阵;

(2) 当 $n < m$ 时, 即“人少活多”的现象, 可虚增 $m - n$ 个老师, 使老师数和课程数门数相等, 这样就使系数矩阵增加了 $m - n$ 行, 构建了新的平衡矩阵;

(3) 当 $n = m$ 时, 即平衡状态下的标准分配问题, 可以直接运用匈牙利算法来求出最优解。

三、实例应用

某高校为了培养和发展学生们对数学的兴趣, 开设了数学建模、贝叶斯统计在“互联网+”中的应用、电影中的数学文化以及数学游戏及其教学四门兴趣课程, 现在学校有 6 名相关专业老师可承担相关课程, 通过调查问卷、学生成绩、教研组长和课程课时分析, 得出老师对教学课程的熟悉程度矩阵 S , 学生对老师授课方式的接受序列 R , 老师的职业能力序列 K , 老师的教学时长序列 T , 请运用匈牙利算法合理安排教学任务。

表 1 相关数据

老师	数学建模	电影中的数学文化	贝叶斯统计在互联网+中的应用	数学游戏及其教学	接受程度	职业能力	时长
课程熟悉程度矩阵 S				生对师接受程度序列 R		老师职业能力序列 K	老师教学时长序列 T
L1	10	8	8	6	8.9	9.43	16
L2	7	6	7	8	8.65	9.1	15
L3	9	9	6	6	8.62	9.1	18
L4	6	7	9	7	8.31	8.86	22
L5	7	8	7	6	8.43	8.56	20
L6	6	9	6	9	9	9.12	15

表 2 价值矩阵 C

老师	数学建模	电影中的数学文化	贝叶斯统计在互联网+中的应用	数学游戏及其教学
L1	52	42	42	31
L2	37	31	37	42
L3	39	39	26	26
L4	20	23	30	23
L5	25	29	25	22
L6	35	53	35	53

运用匈牙利算法求解过程如下:

表3 变形

老师	数学建模	电影中的数学文化	贝叶斯统计在互联网+中的应用	数学游戏及其教学	虚拟课程1	虚拟课程2
L1	52	42	42	31	0	0
L2	37	31	37	42	0	0
L3	39	39	26	26	0	0
L4	20	23	30	23	0	0
L5	25	29	25	22	0	0
L6	35	53	35	53	0	0

1. 对效益矩阵增加两行，使其成为6阶方阵

2. 取 $M = 53$ ，使 $C'_{ij} = M - C_{ij}$

3. 根据算法求最优

$$C = \begin{pmatrix} 52 & 42 & 42 & 31 \\ 37 & 31 & 37 & 42 \\ 39 & 39 & 26 & 26 \\ 20 & 23 & 30 & 23 \\ 25 & 29 & 25 & 22 \\ 35 & 53 & 35 & 53 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 52 & 42 & 42 & 31 & 0 & 0 \\ 37 & 31 & 37 & 42 & 0 & 0 \\ 39 & 39 & 26 & 26 & 0 & 0 \\ 20 & 23 & 30 & 23 & 0 & 0 \\ 25 & 29 & 25 & 22 & 0 & 0 \\ 35 & 53 & 35 & 53 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow C' = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 11 & 22 & 53 & 53 \\ 16 & 22 & 16 & 11 & 53 & 53 \\ 14 & 14 & 27 & 27 & 53 & 53 \\ 33 & 30 & 30 & 30 & 53 & 53 \\ 28 & 24 & 31 & 31 & 53 & 53 \\ 18 & 0 & 18 & 0 & 53 & 53 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$C' = \begin{pmatrix} \Delta & 10 & 10 & 21 & 23 & 23 \\ 5 & 11 & 5 & \Delta & 13 & 13 \\ \otimes & \Delta & 13 & 13 & 10 & 10 \\ 10 & 7 & \Delta & 7 & 1 & 1 \\ 4 & \otimes & 4 & 7 & \Delta & \otimes \\ 18 & \otimes & 18 & \otimes & 24 & 24 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \Delta & 10 & 5 & 21 & 18 & 18 \\ 5 & 11 & \otimes & \otimes & 8 & 8 \\ \otimes & \Delta & 8 & 13 & 5 & 5 \\ 15 & 12 & \Delta & 12 & 1 & 1 \\ 9 & 5 & 4 & 12 & \Delta & \otimes \\ 8 & \otimes & 13 & \Delta & 24 & 24 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \Delta & 10 & 5 & 21 & 17 & 17 \\ 5 & 11 & \Delta & \otimes & 7 & 7 \\ \otimes & \Delta & 8 & 13 & 4 & 4 \\ 15 & 12 & \otimes & 12 & \Delta & \otimes \\ 10 & 6 & 5 & 13 & \otimes & \Delta \\ 8 & \otimes & 13 & \Delta & 23 & 23 \end{pmatrix}$$

得到最优解： $x_{11} = x_{23} = x_{32} = x_{45} = x_{55} = x_{66} = 1$ ，其余均为0。
最优化指派如下表所示

表4 任务分配

课程	数学建模	电影中的数学文化	贝叶斯统计在互联网+中的应用	数学游戏及其教学
老师	L1	L3	L2	L6

四、结语

根据匈牙利算法得出最优的指派方案为：L1 老师教授数学建模，L3 老师教授数学中的电影文化，L2 老师教授贝叶斯统计在互联网+中的应用，L6 老师教授数学游戏及其教学。

本文从实际出发，介绍了解决指派问题的传统算法——匈牙利法，同时运用数学建模的思想建立了求解模型，以求科学地、高效地、客观地解决教学任务的指派问题，相比传统的教学任务指派模式更加省时省力，科学合理，通过匈牙利算法，结合人员任务分配实例进行分析研究，最终得出人员与岗位配置的最优解，使教师资源配置有效化，提高教学效率，确保教育教学质量，从

而为学校的人事决策提供参考。

参考文献：

[1] 全国十二所重点师范大学联合编写. 教育学基础 [M]. 北京：教育学出版社，2014.
 [2] 袁振国. 当代教育学 [M]. 北京：教育科学出版社，2010.
 [3] 陈立山, 李树平. 由“田忌赛马”想到教学任务的科学分配 [J]. 职业技术, 2006 (10) : 104.
 [4] 杨帆, 李慧, 胡又农. 匈牙利算法求解教学任务指派问题 [J]. 中国教育技术装备, 2017 (14) : 12-13+16.
 [5] 党耀国, 朱建军, 徐海燕, 关叶青. 运筹学 [M]. 北京：电子工业出版社，2015.
 [6] 岳宏志, 蔺小林, 杨勇, 高晓艳. 运筹学 [M]. 东北：东北财经大学出版社，2012.
 [7] 张显赫. 引进竞争机制，搞横向联合，提高教学水平 [J]. 中学教师培训, 1991 (01) .
 [8] 刘来福, 曾立共. 数学模型与数学建模 [M] 北京：北京师范大学出版社，2017.