

R 软件在《计量地理学》教学中的应用

——以线性规划为例

蔡依洳 彭俊*

(湖南科技大学资源环境与安全工程学院, 湖南湘潭 411201)

摘要: 线性规划是辅助人们进行科学管理、研究线性约束条件下线性目标函数的极值问题的数学理论和方法。在地理学领域, 线性规划作为一种传统的计量地理学方法, 是解决有关规划、决策、系统优化问题的重要手段。R 软件的编译语言简单、容易掌握, 在计量地理学的教学过程中引入 R 软件, 既能快速简便地计算例题结果辅助教学, 又可激发学生的学习热情和主动性, 提高学生运用线性规划解决实际问题的能力。

关键词: R; 计量地理; 线性规划

一、R 软件简介

R 是一种开源软件, 具有自由免费、占用空间小、编程语言简单、功能强大、扩展性能好等优点, 是数据分析工程师和科学家的常用工具, 初学者也能很快掌握。在 R 软件的主页 (<https://www.r-project.org/>) 可以下载最新版本的安装程序并调用各种程序包。在教学中, 教师应鼓励学生在课后去参阅 R 软件中各种计算方法的 R 程序, 理解巩固和促进对计算方法的掌握。

R 软件应用广泛, 在统计遗传学、生物信息学、经济学、工程学等多个领域都得到了应用。将 R 软件引入计量地理学的教学中, 是符合学科和社会发展规律的。

二、线性规划的数学模型

线性规划研究的问题都是在限制条件下, 寻找某种极值目标。可以概括为以下 3 个特征:

1. 每个问题都可以由一组未知变量 (x_1, x_2, \dots, x_n) 表示某一规划方案, 其一组定值代表一个具体的方案, 其中未知变量的取值一般是非负的。

2. 每一个问题都包含目标函数和约束条件, 即在约束条件的规定范围内求目标函数的最大或最小值。

3. 每一个问题的目标函数和约束条件都是线性的。

由此可以抽象概括出线性规划问题的数学模型, 一般形式为:

在线性约束条件

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq (\geq, =) b_i (i=1, 2, \dots, m)$$

以及非负约束条件

$$x_j \geq 0 (j=1, 2, \dots, n)$$

下, 求一组未知变量 $x_j (j=1, 2, \dots, n)$ 的值, 使

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min)$$

采用矩阵形式可描述为:

在约束条件 $AX \leq (\geq, =) b, X \geq 0$ 下, 求未知变量 $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, 使得

$$Z = CX \rightarrow \max(\min)$$

其中

$$b = [b_1, b_2, \dots, b_m]^T \quad C = [c_1, c_2, \dots, c_n]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

三、线性规划的标准形式及方法

(一) 线性规划的标准形式

在讨论与计算时, 需要将线性规划问题的数学模型转化为标准形式, 即在约束条件

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} x_j \geq 0 (j=1, 2, \dots, n), b_m \geq 0$$

下, 求一组未知变量 $x_j (j=1, 2, \dots, n)$ 的值,

$$\text{使 } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \text{ 常记为: } \begin{cases} \max Z = CX \\ AX = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

(二) 线性规划的标准形式转换方法

具体的线性规划问题, 需要对目标函数或约束条件进行转换, 化为标准形式。

1. 目标函数化为标准形式的方法

如果线性规划问题的目标函数为 $\min Z = CX$

显然有 $\min Z = \max(-Z) = \max Z'$

则目标函数的标准形式为 $\max Z' = -CX$

2. 约束方程化为标准形式的方法

若第 k 个约束方程为不等式, 即

$$x_j \geq 0 (i=1, 2, 3; j=1, 2, 3)$$

引入松弛变量 $x_{n+k} \geq 0$ 将方程改写为

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n + (-)x_{n+k} \leq (\geq)b_k$$

则目标函数标准形式为

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{j=1}^n c_j x_j + 0 \cdot x_{n+k}$$

四、线性规划在 R 软件中的实现

某农场 I、II、III 等耕地的面积分别为 100 hm²、300 hm² 和 200 hm², 计划种植水稻、大豆和玉米, 要求三种作物的最低收获量分别为 190 000 kg、130 000 kg 和 350 000 kg。I、II、III 等耕地种植三种作物的单产如表 1 所示。若三种作物的售价分别为水稻 1.20 元/kg, 大豆 1.50 元/kg, 玉米 0.80 元/kg。那么, 如何制定种植计划, 才能使总产值最大?

表1 不同等级耕地种植不同作物的单产 单位: kg/hm²

作物	I 等耕地	II 等耕地	III 等耕地
水稻	11 000	9 500	9 000
大豆	8 000	6 800	6 000
玉米	14 000	12 000	10 000

根据题意, 决策变量设置如表2所示, 表中表示在第xij等级的耕地上种植第j种作物的面积。三种作物的产量如表3所示。

表2 作物计划种植面积 单位: kg/hm²

作物	I 等耕地	II 等耕地	III 等耕地
水稻	x_{11}	x_{12}	x_{13}
大豆	x_{21}	x_{22}	x_{23}
玉米	x_{31}	x_{32}	x_{33}

表3 三种作物的总产量

作物	总产量/kg
水稻	$11000x_{11} + 9500x_{21} + 9000x_{31}$
大豆	$8000x_{12} + 6800x_{22} + 6000x_{32}$
玉米	$14000x_{13} + 12000x_{23} + 10000x_{33}$

则该线性规划问题可建立如下的数学模型:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 100 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 300 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 200 \\ 11000x_{11} + 9500x_{21} + 9000x_{31} \geq 19000 \\ 8000x_{12} + 6800x_{22} + 6000x_{32} \geq 13000 \\ 14000x_{13} + 12000x_{23} + 10000x_{33} \geq 35000 \end{cases}$$

非负约束: $x_{ij} \geq 0 (i=1,2,3; j=1,2,3)$

目标函数: $\max Z = 1.20 * (11000x_{11} + 9500x_{21} + 9000x_{31}) + 1.50 * (8000x_{12} + 6800x_{22} + 6000x_{32}) + 0.80 * (14000x_{13} + 12000x_{23} + 10000x_{33})$
 $= 13200x_{11} + 11400x_{12} + 10800x_{13} + 12000x_{21} + 10200x_{22} + 9000x_{23} + 11200x_{31} + 9600x_{32} + 8000x_{33}$

可以使用R软件的lpSolve程序包中的lp()函数进行求解, 函数的语法可以参阅lpSolve文件。

求解此问题的R代码为:

```
library(lpSolve)
obj<-c(13200, 11400, 10800, 12000, 10200, 9000, 11200, 9600, 8000)
con<-rbind(c(-11000, -9500, -9000, 0, 0, 0, 0, 0, 0),
```

水稻的最低收获量约束

```
c(0, 0, 0, -8000, -6800, -6000, 0, 0, 0), # 大豆的最低收获量约束
```

```
c(0, 0, 0, 0, 0, 0, -14000, -12000, -10000), # 玉米的最低收获量约束
```

```
c(1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0), # I等耕地最大可种植面积
```

```
c(0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0), # II等耕地最大可种植面积
```

```
c(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1)) # III等耕地最大可种植面积
```

```
dir<-c("<=","<=","<=","=","=","=")
rhs<-c(-190000, -130000, -350000, 100, 300, 200) # 约束条件
```

```
LP<-lp(direction="max", # 目标极值
```

```
objective.in=obj, # 系数
```

```
const.mat=con, # 约束条件系数
```

```
const.dir=dir, # 方向
```

```
const.rhs=rhs) # 约束条件范围
```

程序运行结果如下:

```
LP$solution
58.75 300.00 200.00 16.25 0.00 0.00 25.00 0.00 0.00 # 种植计划方案
```

```
LP$objval
```

```
6830500 # 最大总产值
```

由运行结果可知, 最大总产值为6 830 500元。种植计划方案如表4所示, 水稻的种植面积在I、II、III等耕地上都占绝对优势。

表4 不追求总产值最大的种植计划方案 单位: hm²

作物	I 等耕地	II 等耕地	III 等耕地
水稻	58.75	300	200
大豆	16.25	0	0
玉米	25	0	0

五、结语

在线性规划的教学过程中, 使学生在掌握单纯形算法的求解思路和手算技巧的基础上, 学会相关软件的使用, 既能快速简便地解决问题, 又能加深学生对基本概念的理解。基于R软件的线性规划教学增加了教学的直观性, 开阔了学生的视野, 激发了学生学习的兴趣和积极性, 能起到良好的教学效果。在计量地理学的教学中采用R软件作为教学辅助工具, 值得推广。

参考文献:

[1] 高成强.R语言在几类优化问题中的应用[J].价值工程, 2019, 38(17): 238-240.
 [2] 顾洪亮, 余光明.探究R语言在高师院校课程中的教学实践研究——以地理科学专业《计量地理学》为例[J].现代交际, 2020(19): 70-72.
 [3] 许岩.R软件在运筹学课程教学中的应用[J].科技经济导刊, 2018, 26(07): 121-122.

本文系: 湖南科技大学 校级教研项目“基于R编程语言的《计量地理学》课程教学实践研究”。