

# 大学数学与中学数学衔接问题研究

## ——以三角函数、反三角函数教学为例

吴忠林 王国忠 丁伯伦 陈 乾

(扬州工业职业技术学院 基础科学部, 江苏 扬州 225000)

**摘要:** 大学数学是很多理工科专业一门公共基础课程, 是中学数学的延伸与拓展。随着多轮的中学数学教育改革的完成, 大学数学与中学数学之间存在的衔接问题变得日益突出, 影响高等教育的发展质量, 这引起国内外许多学者的关注。本文建立在自己的教学实践基础上, 以三角函数与反三角函数为例, 分析了大学数学与中学数学之间的断层脱节问题, 并针对这些问题提出具体的对策与建议。

**关键词:** 三角函数; 反三角函数; 衔接

在高等教育中, 大学数学是很多理工科专业的一门必修的公共基础课程, 它对学生的思维能力的培养起着非常重要的作用, 同时数学与其他专业课程相融合, 服务于专业, 为解决实际问题提供理论支撑。然而, 我们发现在实际教学中, 学生的数学学习出现了知识重叠、断层脱节的现象。在近几年教育改革中, 为了实施高观点视角下中学数学教学, 部分大学数学内容已下放到高中阶段, 造成两个学段知识重复发生。譬如, 在中学里, 为了更好地研究函数, 高中教材引入导数这个工具, 利用导数判断函数的性态等, 但中学数学讲授导数知识缺乏极限概念的支撑, 学生只能用无限逼近的思想来作直观上的了解, 无法达到本质上的理解。事实上, 中学数学与大学数学知识重叠内容其实对学生影响并不算太大, 无非重新温习一遍, 加深理解, 引导学生归纳总结, 并适当拓展提升。我们更要关注的是中学数学与大学数学知识断层脱节问题, 这些知识直接影响学生的后继专业课程的学习, 影响学生终身发展。在本文中, 笔者以“三角函数、反三角函数”内容为例, 结合自己的教学实践, 具体分析了大学数学与中学数学断层脱节问题, 并针对这些问题提出相应的解决方法, 促进了高等数学与中学数学的顺利有效的衔接。

### 一、存在的脱节问题

根据教育部普通高中数学课程标准的要求, 三角函数模块是中学数学重点内容, 在每年高考试题中, 占有相当大的比重。此模块涉及到正弦函数、余弦函数和正切函数的图像及性质、同角基本关系  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$   $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ , 还包括三角恒等变换公式、正余弦定理应用。然而, 我们发现在中学数学课本中没有提及到的余切函数  $y = \cot x$ 、正割函数  $y = \sec x$ 、余割函数  $y = \csc x$  在高等数学中有着广泛的应用, 三角恒等变换中半角公式、积化和差公式、和差化积公式在高数课本也频频亮相, 这些都是学生进入大学阶段学习高等数学必要的知识基础, 特别在极

限理论、微积分学以及级数理论中使用较多。尽管大学老师在预备知识课堂上也会提及这些新的内容, 由于大学课业任务重、压力大、教学时间短, 所以老师也不会课堂上讲得太详细, 这就导致了大一新生在学习高等数学时因知识断层脱节出现学习困难、跟不上进度的情况发生。

### (一) 三角函数存在的脱节问题

近几十年来, 我国的基础教育经过了多轮改革, 在教学内容上改变了“繁、难、偏、旧”的内容, 为了减轻学生在高中阶段的学习负担, 课程标准淡化或删减了这部分知识, 在一定程度上确实是减轻了中学数学的任务量, 但是也加大了高等数学的课业任务和压力, 影响大学数学的理解与学习。举例来说, 现行的高考大纲对积化和差、和差化积公式和半角公式不作考核要求, 中学老师也不会在此花费更多的时间和精力, 这就直接导致学生不能熟练掌握这三组公式, 往往在求解不定积分时会遇到困难, 例如在求解不定积分  $\int \cos 3x \cos 2x dx$  中, 因无法直接使用换元积分和分部积分, 如果学生不熟悉积化和差公式, 这一积分的求解就变得非常复杂与困难; 在证明求导公式  $(\sin x)' = \cos x$  时有这样一步变形:  $\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2\sin(\frac{\Delta x}{2})\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}$ , 这里要用到三角函数中的和差化积公式。所以说, 积化和差公式、和差化积公式在高等数学教材中是直接拿过来使用的。如果学生的知识体系中没有这些知识储备, 必然会影响到他们对新内容的理解和掌握。另外, 新课程标准中也删减了常用三角函数中的余切函数  $y = \cot x$ 、正割函数  $y = \sec x$  和余割函数  $y = \csc x$ , 以及与它们相关的同角三角关系:  $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$   $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ 、 $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ 、 $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$   $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$ 。这使得学生进入大学阶段, 在接触这些三角函数与三角函数关系时只能当作新学内容, 不能运用自如。而一些高校老师又不熟悉新课程标准变化, 他们默认大一新生已经具备了这些知识基础, 常常导致了許多课堂突发事件的发生。

### (二) 反三角函数存在的脱节问题

建构主义观认为学习不是简单地教师传递、学生接受的过程, 而是根据学生大脑中原有的知识结构, 以同化或顺应的方式, 对外部获得信息进行主动地选择、加工和重组, 把新内容纳入原有的知识体系, 重新建立新的知识结构, 这种过程是自己内化的过程, 别人是无法替代的。所以在教学的过程中, 教师应该主动发现了

解学生已有的知识结构和经验水平,让它作为学习新内容的基础,在原有经验的前提下,找准新旧知识的切入点,才能更顺利地实现向新知识的转化,做到教学的有效衔接。根据建构主义的观点,教学过程实际上是知识的处理和转换,而不是单纯地知识传递。因此,我们在课堂教学中也应经常与学生相互交流,了解彼此实际的想法,尊重学生个性化发展。这一过程需要基于学生已有的知识技能、思维习惯、能力水平等经验,因此它们也直接决定了学习者接受新知识的质与量。在高中阶段,由于新课程标准删除了反三角函数的知识内容,学生连反三角函数的概念都不知道。从建构主义学习理论的角度来看,这会让学生在高等数学阶段接触到反三角函数相关内容时存有畏难情绪,进而对所学内容的理解带来不可估量的负面影响。例如我们

在学习不定积分  $\int \sqrt{1-x^2} dx$  时,令  $x = \sin t, |t| < \frac{\pi}{2}$ , 则被积函数化为  $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = |\cos t| = \cos t$ , 又  $dx = \cos t dt$ , 因此,上述所求的不定积分化为:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t) + C = \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + C$$

如果没有学过反三角函数,你就无法进行变量还原。由此可见,学习反三角函数对于理解高等数学知识有着不可替代的作用。然而,由于反三角函数是建构在反函数内容基础上的,而在高中阶段学生对于反函数的认识,只停留在指数函数  $y = a^x$  与对数函数  $y = \log_a x$  互为反函数且二者的图像关于直线  $y = x$  对称这一表面上,至于对反函数存在条件( $x$ 和 $y$ 满足一一对应关系)没有做过多的研究。因此,没有反函数的理论基础,在衔接问题上就无法上升到方法论层面,没有反函数理论基础的支撑,对于反三角函数知识的建构总会出现知之者甚少或是不知其意的现象。

## 二、对策与建议

### (一) 加强学段间的交流

一方面大学教师需要充分了解中学课程改革新动向,在中学数学课程改革时可以邀请大学讲授高等数学的教师参与其中,分析现行高中数学的知识是否达到学习高等数学的基础要求。在此基础上,依据高等数学的需求和中学数学的现状,可以适当地将高等数学的知识进行下放,例如将积化和差与和差化积公式的作为三角恒等变换探索内容、提高反三角函数在中学数学中的地位,纳入中学数学的知识体系中。另一方面,高中教师要深刻领悟新课改的精神,更新教学理念,改变传统的教学方式,特别要加强数学思想方法在高中中的渗透,培养学生主动探索新知,提高数学核心素养。只有高中教师和大学教师密切配合,加强交流,才能实现中学数学与大学数学的有效衔接。

### (二) 开发大学预修课程

首先,高校教师可以依据多年教学经验,与高中资深教师进行探讨,自行编写适合本校校情的预修教材;也可以参考市面上现有的衔接书籍(如浙江大学出版社的《大学与中学数学衔接》),这些预修教材可以随同录取通知书一起寄到学生手中,方便学生

入学前自学。其次,高校教师可以利用互联网在线开放课程或直播视频为学生答疑解惑,帮助学生理解知识,促进师生交流,顺利开展衔接工作。最后,为了检测学生对预修课程的掌握程度,大学可以组织新生在入学时进行统一测试,了解学生学习情况、知识储备和学生的入学成绩,为大学教师提供了第一手学情资料。

### (三) 组织适当衔接培训

一般从事高等数学教学大学老师其研究方向多为数学各分支,他们很少关注中学数学课程改革,不少老教师对中学数学内容的认识还停留在自己读书的时候,所以对大学讲授高等数学的教师进行适当的衔接培训是十分必要的,大学老师在搞科研的同时不要忘记提升自己的教学水平。最近发展区理论告诉我们,教师只有在充分了解学生已有的能力水平和知识结构才能开展有效教学,有些知识点即使教材上还没能够完善,教师自己可以在备课时提前准备,这样就大大提高了课堂的效率。

## 三、结语

本文以“三角函数、反三角函数”的内容为例进行了具体分析,并提出一些解决方法,只能起着抛砖引玉的作用。当然,中学数学与大学数学衔接问题不仅仅局限于教材内容上的衔接,更多地体现在教学模式、学习方法上的对接,国内外也有很多学者对此进行了专门研究。中学数学与高等数学的有效衔接对学生数学核心素养的培育、专业课程的学习有着极其重要的影响,衔接问题实质上是学习环境的变化、知识体系的延续。因此,为了进一步提升高等数学教学质量,我们必须高度重视衔接问题,采取相应的策略与措施,为学生学习高等数学提供必要的帮助。

## 参考文献:

- [1] 肖永红, 范发明. 高等数学与中学数学教学衔接问题的调查分析[J]. 高师理科学刊, 2009(02): 104-107.
- [2] 潘建辉. 大学数学和新课标下高中数学的脱节问题与衔接研究[J]. 数学教育学报, 2008(4): 67-69.
- [3] 李妍. 初高等数学衔接问题的研究[D]. 海南师范大学, 2020.
- [4] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2018.
- [5] 华东师大数学系. 数学分析(第4版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.
- [6] 赵莎. 高中数学与数学分析衔接问题的研究[D]. 青海师范大学, 2019.