一种基于多种利率模型的拟合方法

戚长友
（江苏省淮安技师学院，江苏 淮安 223001）

摘要：利用不同的利率模型对同一组数据进行拟合时，利率曲线往往是不同的，拟合的精度也有很多的差异。事实上，影响利率市场的因素有很多，建立在单一因素上的利率模型往往不能够准确反应出债券收益率的变化情况，结合几种利率因素的组合模型在模拟和预测收益率方面更有优势。按照某种标准，对多种利率模型得到的数据进行加权，从而得到组合优化模型。其中，最重要的工作是确定加权系数，因为这从根本上影响到拟合的准确度。本文利用数学方法对加权系数进行确定，并得到了组合最优解，从理论上论证了组合优化模型在预测和估计国债收益率方面比单一模型更加有效，通过实证分析，证明了组合优化模型能够更加准确地拟合市场的真实利率曲线，弥补了单一模型的缺点，提高了利率模型的可用性，具有较大的应用前景。

关键词：率期限结构；即期利率曲线；组合优化模

一、组合优化模型的理论证明

本文基于组合优化的思想，在构建利率期限结构模型时，根据理论价格与实际价格残差平方和最小的单一准则，确定组合优化模型中的权重系数。相关模型如下：

记 $P_i^{'}$ 表示第 i 个债券的实际市场价格；P_{ij} 表示第 i 个债券的第 j 个模型所得的理论价格；W_j 表示第 j 个模型在组合模型中的权重，且 $\sum_{j=1}^{m} W_j = 1$；P_i 表示第 i 个债券的组合优化模型理论价格，且 $P_i = \sum_{j=1}^{m} W_j P_{ij}$。定义组合优化模型的残差平方和为

$$RSS = \sum_{i=1}^{n} (P_i - P_i')^2 \quad (1)$$

下面，先通过理论分析说明组合模型的优势。引理 1：设 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)^\tau, x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^\tau$ 且 $x_i \neq 0$，$i = 1, 2, \cdots, n$。令 $S = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i)^2$，则存在 n 阶非退化矩阵 A，使得

$S = \lambda^\tau A \lambda$，$\dfrac{\partial S}{\partial \lambda} = 2A\lambda$ 证明：注意到

$$S = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \cdot (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i)$$

$$= ((\lambda_1, \ \lambda_2, \ldots \lambda_n) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}) \cdot ((\lambda_1, \ \lambda_2, \ldots \lambda_n) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix})^\tau$$

$$= (\lambda_1, \ \lambda_2, \ldots \lambda_n) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \cdot (x_1, \ x_2, \ldots x_n) \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda_1, \ \lambda_2, \ldots \lambda_n) \cdot \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & \cdots & x_1 x_n \\ x_2 x_1 & x_2^2 & \cdots & x_2 x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n x_1 & x_n x_2 & \cdots & x_n^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda_1, \ \lambda_2, \ldots \lambda_n) \cdot A \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda^\tau A \lambda$$

其次，$\forall \lambda_k$，有 $\dfrac{\partial S}{\partial \lambda_k} = 2(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \cdot x_k$，那么

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = (\frac{\partial S}{\partial \lambda_1}, \frac{\partial S}{\partial \lambda_2}, \cdots, \frac{\partial S}{\partial \lambda_n})^\tau = 2 \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \cdot (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i)$$

$$= 2 \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \cdot (x_1, x_2, \cdots, x_n) \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= 2 \cdot \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & \cdots & x_1 x_n \\ x_2 x_1 & x_2^2 & \cdots & x_2 x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n x_1 & x_2 x_2 & \ldots & x_n^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= 2A\lambda$$

其中，$A = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & \cdots & x_1 x_n \\ x_2 x_1 & x_2^2 & \cdots & x_2 x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n x_1 & x_2 x_2 & \ldots & x_n^2 \end{bmatrix}$，$|A| \neq 0$，为一个 n 阶非退化矩阵。

定理 1：设有 n 个不同到期日的国债，价格观测值分别用 m 种模型来对国债价格进行拟合，P_{ij} 表示利用第 j 种模型对

第 i 个国债价格估计值，P_i 表示利用组合优化模型对第 i 个国债价格估计值，$P_i^{'}$ 表示第 i 个国债的实际价格。记

$$P_i=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j P_{ij}$$

其中，$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1$。那么，存在 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)^\tau$ 使得残差平方和

$$RSS=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j P_{ij}-P_i^{'})^2 \quad (2)$$

取到最小值。

证明：由引理 1 得：

$$\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j P_{ij})^2=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_1 P_{i1}+\lambda_2 P_{i2}+\cdots+\lambda_m P_{im})^2=\sum_{i=1}^{n}\lambda^\tau\Lambda_i\lambda\ge 0$$

其中，$\Lambda_i=\begin{bmatrix}P_{i1}^2 & P_{i1}P_{i2} & \cdots & P_{i1}P_{im}\\ P_{i2}P_{i1} & P_{i2}^2 & \cdots & P_{i2}P_{im}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ P_{im}P_{i1} & P_{im}P_{i2} & \cdots & P_{im}^2\end{bmatrix}$。

则残差平方和为

$$\begin{aligned}RSS&=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j P_{ij}-P_i^{'})^2\\
&=\sum_{i=1}^{n}((\sum_{j=1}^{m}\lambda_j P_{ij})^2-2(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j P_{ij})P_i^{'}+P_i^{'2})\\
&=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j P_{ij})^2-2\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j P_{ij})P_i^{'}+\sum_{i=1}^{n}P_i^{'2}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\lambda^\tau\Lambda_i\lambda-2\sum_{i=1}^{n}((\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)\cdot\begin{bmatrix}P_{i1}\\P_{i2}\\ \vdots\\P_{im}\end{bmatrix})P_i^{'}+\sum_{i=1}^{n}P_i^{'2}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\lambda^\tau\Lambda_i\lambda-2\cdot\lambda^\tau(\sum_{i=1}^{n}\begin{bmatrix}P_{i1}\\P_{i2}\\ \vdots\\P_{im}\end{bmatrix}\cdot P_i^{'})+\sum_{i=1}^{n}P_i^{'2}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\lambda^\tau\Lambda_i\lambda-2\cdot\lambda^\tau p_{xy}+\sum_{i=1}^{n}P_i^{'2}\end{aligned}$$

其中，$p_{xy}=\sum_{i=1}^{n}\begin{bmatrix}P_{i1}\\P_{i2}\\ \vdots\\P_{im}\end{bmatrix}\cdot P_i^{'}$ 为一常数列向量。

利用拉格朗日乘数法求解该模型。令

$$L=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j P_{ij}-P_i^{'})^2+\delta_1(1-\lambda^\tau e) \quad (3)$$

其中，$e=\begin{bmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{bmatrix}$。

最优解的一阶条件为

$$\frac{\partial L}{\partial\lambda^\tau}=2\sum_{i=1}^{n}\Lambda_i\lambda-2pxy-\delta_1 e=0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\delta_1}=1-e^\tau\lambda=0 \quad (5)$$

由方程（5）得到最优解（由 Λ_i 非退化）

$$\lambda^*=(\sum_{i=1}^{n}\Lambda_i)^{-1}p_{xy}+\frac{\delta_1}{2}(\sum_{i=1}^{n}\Lambda_i)^{-1}e \quad (6)$$

将式（7）代入式（6）得：

$$1=e^\tau(\sum_{i=1}^{n}\Lambda_i)^{-1}p_{xy}+\frac{\delta_1}{2}\cdot e^\tau(\sum_{i=1}^{n}\Lambda_i)^{-1}e \quad (7)$$

令 $a=e^\tau(\sum_{i=1}^{n}\Lambda_i)^{-1}p_{xy},b=e^\tau(\sum_{i=1}^{n}\Lambda_i)^{-1}e$，则有

$$\delta_1=\frac{2(1-a)}{b} \quad (8)$$

将式（8）代入式（7）可得：

$$\lambda^*=(\sum_{i=1}^{n}\Lambda_i)^{-1}p_{xy}+\frac{1-a}{b}(\sum_{i=1}^{n}\Lambda_i)^{-1}e \quad (9)$$

综上所述，存在 λ 使得残差平方和

$$RSS=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j P_{ij}-P_i^{'})^2$$

为最小，其最小值 $RSS_{\min}=\sum_{i=1}^{n}(\lambda^{*\tau}\cdot\begin{bmatrix}P_{i1}\\P_{i2}\\ \vdots\\P_{im}\end{bmatrix}-P_i^{'})^2$。

定理证毕。

推论 1：从定理 1 可得，由 n 种单一模型构成的组合优化模型拟合效果最好。

事实上，任取第 k 种模型，其国债价格估计值与实际值的残差平方和为

$$RSS_k=\sum_{i=1}^{n}(P_{ik}-P_i^{'})^2,$$

取 $\lambda^{'}=(0,0,\cdots,1,\cdots,0)^\tau$，即第 k 位为 1，其余为 0 的列向量，

那么 $P_{ik}=\lambda^{'\tau}\cdot\begin{bmatrix}P_{i1}\\P_{i2}\\ \vdots\\p_{im}\end{bmatrix}$，因而有

$$RSS_k=\sum_{i=1}^{n}(\lambda^{'\tau}\cdot\begin{bmatrix}P_{i1}\\P_{i2}\\ \vdots\\P_{im}\end{bmatrix}-P_i^{'})^2$$

但由定理 1 可知，当 $\lambda=\lambda^*$ 时，RSS 取到最小值，因而 $RSS_{\min}\le RSS_k$。所以，组合优化模型对国债价格拟合效果最好。

二、 组合优化模型的实证分析

一般而言，NS 模型、NSM 模型、Vasicek 模型和 CIR 模型

对国债价格拟合的效果较好。将这几种模型的国债价格估计值与实际价格输入“国债价格 .xls”。根据第 1 节的证明，编写程序求出最优解 λ^* ，得：

$$\lambda^* = (0.4961, 0.8542, 48.5482, -48.8984)^T$$

此时，组合优化模型的利率期限结构为

$$r(t) = \lambda_1 r_1(t) + \lambda_2 r_2(t) + \lambda_3 r_3(t) + \lambda_4 r_4(t)$$

其中，$r_1(t), r_2(t), r_3(t), r_4(t)$ 分别表示 NS 模型，NSM 模型，Vasicek 模型和 CIR 模型的利率期限结构。

从曲线的图形来看，和其他几种模型的即期利率曲线相比，组合优化模型无论是在曲线的波动性还是光滑程度丝毫都不逊色于其中任何一个模型。组合优化模型不仅吸收了各个子模型的优点，而且也在一定程度上去除了一些模型的缺陷，比如在曲线模拟的复杂程度上要优于 Vasicek 模型和 CIR 模型，能够描述出更为弯曲的 V 型曲线。

我们可以看出在置信度 $a = 0.05$ 条件下，组合优化模型的 F 值小于 3.94，说明组合模型拟合效果较好。此外，组合优化模型的 RSS 和 χ^2 值比其他三个模型都要小。因此，相对于单一模型而言，组合优化模型在利率期限结构拟合方面是具有一定优势的。

三、结语

本文在 NS 模型、NSM 模型、Vasicek 模型和 CIR 模型的基础上，利用组合预测思想，通过填加权重系数构建了组合优化模型，通过理论分析证明了组合优化模型比单一模型在利率拟合方面更具优势，给出了组合最优解，并作实证分析。通过实证分析发现，组合优化模型所得到的拟合曲线，在灵活度和准确度方面均比单一模型更有优势。但组合优化模型在拟合国债方面需要几种模型作为基础，所以工作量较大，需要进一步寻找更加方便有效的拟合方法，提高国债拟合的效率。在后续的工作中，一方面简化程序设计使程序运行更加有效，另一方面尝试采用其他方法构建组合优化模型，以期找到更好的拟合方法。

参考文献：

[1] 林鸿熙，江良 .Hull-White 短期利率模型参数估计 [J]. 数学的实践与认识，2018，48（24）.

图文无关