几类幂级数的求和定理——利用微积分算子探析

郑庆云[1]　李　红[2]　宋一杰[1]

（1. 天津仁爱学院，天津 301636；

2. 石家庄工程职业学院，河北 石家庄 050061）

摘要：幂级数求和函数是高等数学课程中幂级数部分的重点和难点．本文应用高等数学的知识，运用微分算子和积分算子以及微积分方程，对某几类幂级数求和方法进行的探究，得到求和的推导公式（即定理），对有关幂级数求和理论的学习和研究是有很大帮助的．

关键词：幂级数；和函数；微分方程；微分算子；积分算子

在高等数学中，常利用幂级数逐次微分或逐次积分的方法求幂级数的和函数，但也有的幂级数可以利用微分方程或者微分算子来进行求解。

一、微积分算子求和公式

微分算子 $D=\dfrac{d}{dx}$ 与积分算子 $\dfrac{1}{D}=\int_0^x\ dx$ 互为逆运算，其比差分算子应用更加广泛，本文定义 $(xD)^k=xD(xD)^{k-1}$，$(\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{D})^k=\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{D}(\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{D})^{k-1}$．

定理 1：设 $p(n)=\sum\limits_{k=0}^{m}a_k n^k$，则

（1）幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}p(n)x^n$ 的和函数 $S(x)$ 满足微分方程 $S(x)=\sum\limits_{k=0}^{m}a_k(xD)^k(\dfrac{1}{1-x})$；

（2）幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{p(n)}x^n$ 的和函数 $S(x)$ 满足微分方程 $\sum\limits_{k=0}^{m}a_k(xD)^k(S(x))=\dfrac{1}{1-x}$；

（3）幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}p(\dfrac{1}{n+1})x^n$ 的和函数 $S(x)$ 满足微分方程 $S(x)=\sum\limits_{k=0}^{m}a_k(\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{D})^k(\dfrac{1}{1-x});$

且上述幂级数的收敛半径均有 $R=1$．

证明：（1）由于 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{p(n+1)}{p(n)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_0+a_1(n+1)+\cdots+a_m(n+1)^m}{a_0+a_1n+\cdots+a_mn^m}\right|=1$，

所以 $R=1$．

易知，

$$(xD)^k(x^n)=(xD)^{k-1}(xD(x^n))=(xD)^{k-1}(nx^n)=(xD)^{k-2}(n^2x^n)=(xD)(n^{k-1}x^n)=n^kx^n,$$

$$p(xD)x^n=\sum_{k=0}^{m}a_k(xD)^kx^n=\sum_{k=0}^{m}a_kn^kx^n=p(n)x^n,$$

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}p(xD)x^n=p(xD)\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{k=0}^{m}a_k(xD)^k(\frac{1}{1-x}).$$

（2）由于 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{p(n)}{p(n+1)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_0+a_1n+\cdots+a_mn^m}{a_0+a_1(n+1)+\cdots+a_m(n+1)^m}\right|=1$，

所以 $R=1$．

易知 $(xD)^k(x^n)=n^kx^n$，从而 $p(xD)x^n=p(n)x^n$，则

$$p(xD)S(x)=p(xD)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p(n)}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p(n)}p(xD)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}.$$

（3）由于 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{p(\frac{1}{n+2})}{p(\frac{1}{n+1})}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_0+\frac{a_1}{n+2}+\cdots+\frac{a_m}{(n+2)^m}}{a_0+\frac{a_1}{n+1}+\cdots+\frac{a_m}{(n+1)^m}}\right|=1$，

所以 $R=1$．

易知，

$$(\frac{1}{x}\frac{1}{D})^k(x^n)=(\frac{1}{x}\frac{1}{D})^{k-1}((\frac{1}{x}\frac{1}{D})(x^n))=(\frac{1}{x}\frac{1}{D})^{k-1}(\frac{1}{n+1}x^n)=(\frac{1}{x}\frac{1}{D})^{k-2}(\frac{1}{(n+1)^2}x^n),$$

$$=\frac{1}{x}\frac{1}{D}(\frac{1}{(n+1)^{k-1}}x^n)=\frac{1}{(n+1)^k}x^n$$

$$p(\frac{1}{x}\frac{1}{D})x^n=\sum_{k=0}^{m}a_k(\frac{1}{n+1})^kx^n=p(\frac{1}{n+1})x^n,$$

则

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p(\frac{1}{n+1})x^n=\sum_{n=0}^{\infty}p(\frac{1}{x}\frac{1}{D})x^n=p(\frac{1}{x}\frac{1}{D})\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{k=0}^{m}a_k(\frac{1}{x}\frac{1}{D})^k(\frac{1}{1-x}).$$

证毕．

推论：幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}p(n)x^n$（其中 $p(n)=an+b$）收敛半径为 $R=1$，其和函数 $S(x)$ 满足微分方程，$S(x)=\dfrac{(a-b)x+b}{(1-x)^2}.$

证明：由于 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{p(n+1)}{p(n)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a(n+1)+b}{an+b}\right|=1$，所以 $R=1$．

根据定理 1 中（1）易知，当 $a_0=b,a_1=a$ 时，利用上述结论

$$S(x)=a_0(xD)^0(\frac{1}{1-x})+a_1(xD)^1(\frac{1}{1-x})=\frac{b}{1-x}+\frac{ax}{(1-x)^2}=\frac{(a-b)x+b}{(1-x)^2}.$$

定理 1 中的（1）受到文献【1】的启发利用微分算子将文献【2】中代数方程方法进一步推广，得到和函数的直接求和公式，涉及到的计算比较简单，可以完全解决此类幂级数求和函数问题；（2）中结论虽然在理论上是成立的，但由于涉及到求解 $S(x)$ 的微分方程，实际上并不容易实现，即使求解出 $S(x)$ 的函数方程，也只是得到含任意常数的形式，有时会综合运用求导、拼凑、分解等来求解；（3）受到文献的启发得到和函数的直接求和公式，考虑到有的和函数不是初等函数，可能会涉及到无法积分的情况．

例 1：求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+3)x^n$ 的和函数 $S(x)$．

解：题目中对应 $a=2,b=3$，由推论得和函数 $S(x)=\dfrac{3\text{-}x}{(1-x)^2},x\in(-1,1).$

例 2：求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 的和函数 $S(x)$．

解：题目对应的 $p(n)=n^2+4n+3$，利用定理 1 得和函数 $S(x)$ 满足下面微分方程

$$\begin{aligned}S(x)&=[(xD)^2+4(xD)+3](\frac{1}{1-x})\\&=(xD)[x(1-x)^{-2}]+4[x(1-x)^{-2}]+3[(1-x)^{-1}]\\&=x[(1-x)^{-2}+2x(1-x)^{-3}]+4x(1-x)^{-2}+3(1-x)^{-1}\\&=(3-x)(1-x)^{-3},x\in(-1,1).\end{aligned}$$

例 3：求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)(n+2)x^n$，的和函数 $S(x)$.

解：由于 $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)(n+2)x^n=x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)x^n$，所以题目中对应的 $p(n)$ 为

$p(n)=n^3+6n^2+11n+6$ ，

利用定理 1 中（1）得和函数 $S(x)$ 满足下面微分方程

$$\begin{aligned}\frac{S(x)}{x}&=[(xD)^3+6(xD)^2+11(xD)+6](\frac{1}{1-x})\\&=(xD)^3(\frac{1}{1-x})+6[2x(1-x)^{-3}+(1-x)^{-2}]+11[x(1-x)^{-2}]+6[(1-x)^{-1}]\\&=\{18x[(1\text{-}x^2)+x-x^2]+6(x^3+1-x^3-3x+3x^2)\}(1-x)^{-4}\\&=6(1-x)^{-4}.\quad 故S(x)=\frac{6x}{(1-x)^4},x\in(-1,1).\end{aligned}$$

例 4：求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+3}x^n(x>0)$ 的和函数 $S(x)$.

解：由题目得 $p(n)=2n+3$ ，利用定理 1 中（2）得和函数 $S(x)$ 满足下面微分方程

$$2xS'(x)+3S(x)=\frac{1}{1-x},\quad 即S'(x)+\frac{3}{2x}S(x)=\frac{1}{2x(1-x)}$$

利用一阶线性方程计算公式，

$$\begin{aligned}S(x)&=e^{-\int\frac{3}{2x}dx}(\int\frac{1}{2x(1-x)}e^{\int\frac{3}{2x}dx}dx+C)=x^{-\frac{3}{2}}(\int\frac{\sqrt{x}}{2(1-x)}dx+C)\\&=x^{-\frac{3}{2}}(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right|-\sqrt{x}+C),x\in(0,1).\end{aligned}$$

结合收敛域中 x 的范围，整理得到 $S(x)$ 的含任意常数的形式为

$$S(x)=x^{-\frac{3}{2}}(\frac{1}{2}\ln(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1})-\sqrt{x}+C),x\in(0,1).$$

注明：上述例 4 利用定理 1 中（2）的结论，虽然没有求解出和函数的具体结果，但是也都得到了 $S(x)$ 满足微分方程的解，为进一步解决问题提供了有益的参考，需要进一步研究。

例 5：求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ 的和函数 $s(x)$.

解：题目对应的 $p(n)=n^2+n$ ，经过整理，可利用定理 1 中（3）中计算公式进行求解 .

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}\text{-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}\text{-}x(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}-1)\\&=x^2\frac{1}{x}\frac{1}{D}(\frac{1}{1-x})-x(\frac{1}{x}\frac{1}{D}(\frac{1}{1-x})-1)\\&=-x\ln(1-x)-\ln(1-x)+x\\&=(1-x)\ln(1-x)+x,\quad x\in[-1,1).\end{aligned}$$

例 6：求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+3)x^n}{(n+1)^2}$ 的和函数 $s(x)$.

解：题目对应的 $p(\frac{1}{n+1})=\frac{1+2(n+1)}{(n+1)^2}=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{2}{(n+1)}$ ，可利用定理 1 中（3）得

$$\begin{aligned}S(x)&=(\frac{1}{x}\frac{1}{D})^2(\frac{1}{1-x})+2\frac{1}{x}\frac{1}{D}(\frac{1}{1-x})\\&=-\frac{1}{x}\frac{1}{D}[\frac{1}{x}\ln(1-x)]-\frac{2}{x}\ln(1-x)\\&=-\frac{1}{x}[\int_0^x\frac{\ln(1-x)}{x}dx+2\ln(1-x)],\quad x\in[-1,1).\end{aligned}$$

注明：其中 $\int\frac{\ln(1-x)}{x}dx$ 的原函数存在，但原函数不是有限的形式，也就是说任何初等函数的导数都不是这个函数，所以无法进行进一步的函数表示 .

二、微分方程求解法

利用级数所满足的微分方程和初始条件，通过解微分方程求出幂级数的和 .

定理 2：幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{np}}{(np)!}(p=1,2,3,\cdots)$ 收敛半径为 $R=+\infty$ ，其和函数 $S(x)$ 满足下面线性微分方程，

$$\begin{cases}\sum_{n=0}^{p-1}S^{(n)}(x)=e^x,\\S(0)=1,\\S^{(n)}(0)=0,n=1,2,\cdots,p-2.\end{cases}$$

证明：对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{np}}{(np)!}(p=1,2,3,\cdots)$ ，有

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{(n+1)p}}{((n+1)p)!}\cdot\frac{(np)!}{x^{np}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^p}{(np+1)(np+2)\cdots(np+p)}=0,(p=1,2,3,\cdots).$$

所以 $R=+\infty$.

令 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{np}}{(np)!}=1+\frac{x^p}{p!}+\frac{x^{2p}}{(2p)!}+\frac{x^{3p}}{(3p)!}+\cdots+\frac{x^{np}}{(np)!}+\cdots$，则有

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x^{np}}{(np)!})'=\frac{x^{p\text{-}1}}{(p\text{-}1)!}+\frac{x^{2p\text{-}1}}{(2p\text{-}1)!}+\frac{x^{3p\text{-}1}}{(3p\text{-}1)!}+\cdots+\frac{x^{np\text{-}1}}{(np\text{-}1)!}+\cdots$$

$$S''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x^{np}}{(np)!})''=\frac{x^{p\text{-}2}}{(p\text{-}2)!}+\frac{x^{2p\text{-}2}}{(2p\text{-}2)!}+\frac{x^{3p\text{-}2}}{(3p\text{-}2)!}+\cdots+\frac{x^{np\text{-}2}}{(np\text{-}2)!}+\cdots$$

…

$$S^{(p\text{-}1)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x^{np}}{(np)!})^{(p\text{-}1)}=x+\frac{x^{p+1}}{(p+1)!}+\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}+\cdots+\frac{x^{(n-1)p+1}}{((n-1)p+1)!}+\cdots$$

将上面 p 个式子加在一起有，

$$\sum_{n=0}^{p-1}S^{(n)}(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^p}{p!}+\frac{x^{p+1}}{(p+1)!}+\cdots\frac{x^{2p}}{(2p)!}+\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}+\cdots=e^x\text{，}\quad（1）$$

且有 $S(0)=1,S'(0)=0,S''(0)=0,\cdots,S^{(P-2)}(0)=0$. 证毕 .

注明：非齐次线性微分方程（1）的通解由对应齐次线性微分方程通解和特解 $\frac{1}{p}e^x$ 构成 . 当 p 值较大时，对应的齐次线性微分方程求解有一定难度，其对应的特征方程为：

$1+r+r^2+r^3+\cdots+r^{p-1}=0$.

根据上述方程解的特点可知，

（1）当 $\mathrm{p}-1=2k\,(k=1,2,\cdots)$ 时，r 必有 k 对共轭复根；

（2）当 $\mathrm{p}=2k\,(k=1,2,\cdots)$ 时，r 必有解 $x_0=\text{-}1$ 和 $k\text{-}1$ 对共轭复根：

①当 $k\text{-}1=2\mathrm{s}$ 时，$x_{m1,m2,\ m3,m4}=\pm\alpha_m\pm\beta_m i,(m=1,2,\cdots,s)$；

②当 $k\text{-}1=2\mathrm{s}+1$ 时有 $x_{1,2}=\pm i$，且有 $x_{m1,m2,\ m3,m4}=\pm\alpha_m\pm\beta_m i,(m=1,2,\cdots,s)$.

例 7：求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 的和函数 .

解：由题目可知 $p=1$，利用定理 2，得和函数 $S(x)=e^x$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

例 8：求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数 .

解：由题目可知 $p=3$，利用定理 2，得和函数 $S(x)$ 满足下面微分方程

$$\begin{cases} S(x)+S'(x)+S''(x)=e^x, \\ S(0)=1, \\ S'(0)=0. \end{cases}$$

得和函数 $S(x)=e^{-\frac{1}{2}x}(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)+\frac{1}{3}e^x$，由边界条件得

$$S(x)=\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}e^x,\ x\in(-\infty,+\infty).$$

例 9：求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ 的和函数 .

解：由题目可知 $p=4$，利用定理 2，得和函数 $S(x)$ 满足下面微分方程

$$\begin{cases} S(x)+S'(x)+S''(x)+S'''(x)=e^x, \\ S(0)=1, \\ S'(0)=0，S''(0)=0. \end{cases}$$

得和函数 $S(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+c_3e^{-x}+\frac{1}{4}e^x$，由边界条件得

$$S(x)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}e^{-x}+\frac{1}{4}e^x,\ x\in(-\infty,+\infty)\ .$$

定理 3：幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{np}}{(np)!}(p=1,2,3,\cdots)$ 收敛半径为 $R=+\infty$，其和函数 $S(x)$ 满足下面线性微分方程，

$$\begin{cases} S^{(p)}(x)+S(x)=0, \\ S(0)=1, \\ S^{(n)}(0)=0,n=1,2,\cdots,p-1. \end{cases}$$

证明：对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{np}}{(np)!}(p=1,2,3,\cdots)$，有

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)x^{(n+1)p}}{((n+1)p)!}\frac{(np)!}{x^{np}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^p}{(np+1)(np+2)\cdots(np+p)}=0,$$ 所以 $R=+\infty$.

令 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{np}}{(np)!}$，则有

$$S'(x)=(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{np}}{(np)!})'$$

$$S''(x)=(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{np}}{(np)!})''=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{np-2}}{(np-2)!}$$

…

$$S^{(p)}(x)=(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{np}}{(np)!})^{(p)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{np-p}}{(np-p)!}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{np}}{(np)!}=-S(x)$$

则有 $S^{(p)}(x)+S(x)=0$ （2）

且有 $S(0)=1,S'(0)=0,S''(0)=0,\cdots,S^{(P-2)}(0)=0$. 证毕 .

例 10：求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}$ 的和函数 .

解：由题目可知 $p=1$，利用定理 3，得和函数 $S(x)$ 满足下面微分方程

$$\begin{cases} S(x)+S'(x)=0, \\ S(0)=1, \end{cases}$$

由常微分齐次线性微分方程的特征方程 $r+1=0$，得到方程的解 $r=-1$，即

得和函数 $S(x)=c_1e^{-x}$，由边界条件得 $S(x)=e^{-x}，x\in(-\infty,+\infty)$.

例 11：求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ 的和函数 .

解：由题目可知 $p=2$，利用定理 2，得和函数 $S(x)$ 满足下面微分方程 $\begin{cases} S(x)+S''(x)=0, \\ S(0)=1,S'(0)=0, \end{cases}$

由常微分齐次线性微分方程的特征方程 $r^2+1=0$，得到方程的解 $r=\pm i$，即得和函数 $S(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$，由边界条件得 $S(x)=\cos x，x\in(-\infty,+\infty)$.

例 12：求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数 .

解：由题目可知 $p=3$，利用定理 3，得和函数 s（x）满足下面微分方程

$$\begin{cases} S(x)+S'''(x)=0, \\ S(0)=1,S'(0)=0，S''(0)=0, \end{cases}$$

由常微分齐次线性微分方程的特征方程 $r^3+1=0$，得到方程的解 $r_1=-1，r_{2,3}=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$，即得和函数 $S(x)=c_1e^{-x}+e^{\frac{1}{2}x}(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$.

由边界条件得关于 $c_1，c_2，c_3$ 的方程组，

$$\begin{cases} c_1+c_2=1, \\ 3c_2+\sqrt{3}c_3=2， \\ c_2=2c_1, \end{cases}$$

即 $c_1=\frac{1}{3}，c_2=\frac{2}{3}，c_3=0$，得和函数 $S(x)=\frac{1}{3}e^{-x}+\frac{2}{3}e^{\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x，x\in(-\infty,+\infty)$.

注：当 p 值较大时，上述计算有一定的难度，但是齐次微分方程的特征方程为 $r^n+1=0$ 的所有复根具有以下结构：$\cos\frac{(2k+1)\pi}{p}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{p}$，$(k=0,1,2,\cdots,p-1)$，其中将实数根也看作复数根 . 按照上面完全确定的微分方程的初值问题进行求解，必能获得结果 .

事实上，幂级数求和函数的问题非常复杂，其方法与技巧也是多种多样的，需要灵活应变，明白其精髓，注重总结方法，达到熟能生巧的境界 .

参考文献：

[1] 黎力军 . 幂级数的算子求和法 [J] 邵阳高专学报，1994，7（4）：311-313.

[2] 解烈军 . 一类幂级数求和函数的代数方程方法 [J] 高等数学研究，2016（3）：37-38.

[3] 苏灿荣，禹春福，周玲 . 幂级数求和的微分方程方法 [J]. 大学数学，2010，26（4）：196-199.

[4] 彭凯军，孙胜先，苏灿荣 . 利用微积分算子求幂级数的和函数 [J] 高等数学研究，2011，14（3）：37 — 38.

作者简介：

郑庆云（1983-），女，汉族，河北人，讲师，硕士，天津仁爱学院，研究方向应用数学。

通讯作者：李红（1985-），女，汉族，河北人，讲师，硕士，石家庄工程职业学院，研究方向应用数学。

宋一杰（1984-），女，汉族，内蒙古人，讲师，硕士，天津仁爱学院，研究方向应用数学。