

《数学分析》课程中部分公式的记忆技巧

丁志良

(怀化师范高等专科学校, 湖南 怀化 418005)

摘要: 在小学数学教育专业人才培养方案中,《数学分析》是一门专业核心课程,其特点是系统性强、逻辑严谨与课程内容广,而且需记忆的数学公式较多、较复杂,作为一名专业课程教师,如何将枯燥的数学公式生动形象地传授给学生是值得探讨的问题。

关键词: 数学分析; 数学公式; 记忆技巧

《数学分析》是小学数学教育专业的一门专业核心课程,其特点是系统性强、逻辑严谨与课程内容广,并且数学公式较多、较复杂。数学公式是以字母和符号表达的一种数学命题,是数学命题的重要组成部分。数学公式是《数学分析》教学中的一个关键环节,是不可忽视的重要教学内容,直接影响到学生后续课程内容的学习,以及数学习题的解答。如何将枯燥的数学公式生动形象地传授给学生呢?

一、从整体意识记忆公式

对于《数学分析》的一些基本公式,不仅仅需记住其基本形式,而且要记住其实用性更加广泛的推广形式,以便于学生的灵活运用,不妨用“□”表示整体,读作“整体”。

(一) 重要极限的基本公式的整体意识记忆

对于重要极限的基本公式 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 可扩展到

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \bigcirc}{\bigcirc} = 1$, 此时自变量变化趋势不仅仅局限于 $x \rightarrow 0$, 而是任意变化趋势, 只需确保 $\bigcirc \rightarrow 0$ 即可。对于重要极限的基本公式

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, 也可扩展 $\lim_{\bigcirc \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\bigcirc}\right)^{\bigcirc} = e$, 此时自变量变化趋势

不仅仅局限于 $x \rightarrow \infty$, 而是任意变化趋势, 只需确保 $\bigcirc \rightarrow 0$ 即可。例如,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + 2x)^{\frac{1}{2x}} \right]^2 = e^2。$$

(二) 等价无穷小的基本公式的整体意识记忆

对于等价无穷小的基本公式, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x \sim \sin x \sim \tan x$

$$\sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1, \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad a^x - 1$$

$$\sim x \ln a, \quad (1+x)^a - 1 \sim ax, \quad \text{可以进行推广到当 } \bigcirc \rightarrow 0 \text{ 时,}$$

$$\bigcirc \sim \sin \bigcirc \sim \tan \bigcirc \sim \arcsin \bigcirc \sim \arctan \bigcirc \sim \ln(1+\bigcirc) \sim e^{\bigcirc} - 1, \quad 1 - \cos \bigcirc \sim \frac{\bigcirc^2}{2}, \quad a^{\bigcirc} - 1 \sim \bigcirc \ln a,$$

$$(1+\bigcirc)^{\alpha} - 1 \sim \alpha \bigcirc。 \text{例如, 当 } x \rightarrow \infty \text{ 时, } \sin \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x};$$

$$\text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } \sqrt{1+x^2} - 1 \sim \frac{1}{2}x^2。$$

(三) 复合函数的基本公式的整体意识记忆

复合函数的导数 $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ 可推广到 $[f(\bigcirc)]' = f'(\bigcirc) \cdot (\bigcirc)'$, 其中 $\bigcirc$ 即可以是一个简单函数, 也

可以是复合函数, 即 $[\sin(\bigcirc)]' = \cos \bigcirc \cdot (\bigcirc)'$, $(e^{\bigcirc})' = e^{\bigcirc} \cdot (\bigcirc)'$

$= e^{\bigcirc} \cdot (\bigcirc)'$ 等。例如, 若 $f(x) = \ln \sin x^2$,

$$f'(x) = (\ln \sin x^2)' = \frac{1}{\sin x^2} (\sin x^2)' = \frac{1}{\sin x^2} \cos x^2 (x^2)' = 2x \cot x^2。$$

二、从公式形式上找规律记忆公式

有些公式可以考虑其本身的特征, 从公式的形式上找其规律, 使其易混淆的公式变得清晰明了。

(一) 参变量函数的导数

对于平面曲线 C 一般的表达式是参变量 (参量) 方程

$$\begin{cases} x = \phi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta \text{ 所确定的函数 } y = y(x) \text{ 的导数, 先写式子}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\quad)'}{(\quad)'}, \text{ 然后根据左边分式 } y \text{ 在分子、} x \text{ 在分母, 在右边分式}$$

的分子、分母的括号中对应填上 y 与 x 关于 t 的表达式, 即

$$y = \psi(t) \text{ 与 } x = \phi(t), \text{ 从而求导公式为 } \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}。 \text{例如, 由上半}$$

$$\text{椭圆的参量方程 } \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad 0 < t < \pi \text{ 所确定的函数 } y = y(x) \text{ 的导}$$

$$\text{数为 } \frac{dy}{dx} = \frac{(b \sin t)'}{(a \cos t)'} = -\frac{b \cos t}{a \sin t} = -\frac{b}{a} \cot t。$$

(二) 隐函数的求导公式

对于方程 $F(x, y) = 0$ 确定的函数即 $y = f(x)$ 的导数公式, 先

$$\text{写式子 } \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}, \text{ 然后根据左边分式 } y \text{ 在分子、} x \text{ 在分母, 在}$$

$$\text{右边分式括号中交错填上 } x \text{ 与 } y, \text{ 即得其公式 } \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}。 \text{相类似}$$

地, 对于 $F(x, y, z) = 0$ 确定的函数即 $z = f(x, y)$, 偏导公式为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}。$$

三、创建图形记忆公式

在《数学分析》中, 可利用公式之间的联系, 创建图形, 使其零散的公式整体化、形象化。

+	-	
sin x	cos x	一层
tan x	cot x	二层
↓↑	↓↑	
sec x	csc x	三层
arcsin x ← $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ → arccos x		
arctan x ← $\frac{1}{1+x^2}$ → arc cot x		

在基本初等函数的导数公式中, 最难记忆部分为三角函数与

反三角函数的导数,不妨创建图形(如上图),帮助学生有效记忆公式。正弦函数 $y = \sin x$ 、正切函数 $y = \tan x$ 、正割函数 $y = \sec x$ 、反正弦函数 $y = \arcsin x$ 、反正切函数 $y = \arctan x$ 等名称中均含有“正”,从而上述函数求导符号均为正;余弦函数 $y = \cos x$ 、余切函数 $y = \cot x$ 、余割函数 $y = \csc x$ 、反余弦函数 $y = \arccos x$ 、反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$ 等名称中均含有“余”,“余”在古语中有“多余”的意思,多了负号,从而上述函数求导符号均为负。在解决求导的符号问题后,按照学习三角函数的顺序,将正弦函数 $y = \sin x$ 与余弦函数 $y = \cos x$ 作为“第一层”,正切函数 $y = \tan x$ 与余切函数 $y = \cot x$ 作为“第二层”,正割函数 $y = \sec x$ 与余割函数 $y = \csc x$ 作为“第三层”,第一层的导数进行互换 $\sin x \leftrightarrow \cos x$,第二层的导数为第三层的平方 $\tan x \rightarrow \sec^2 x, \cot x \rightarrow \csc^2 x$,第三层的导数为本身乘以上一层(第二层) $\sec x \rightarrow \sec x \tan x, \csc x \rightarrow \csc x \cot x$ 。反正弦函数 $y = \arcsin x$ 与反余弦函数 $y = \arccos x$ 的导数具有相同的部分 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,反正切函数 $y = \arctan x$ 与反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$ 的导数具有相同的部分 $\frac{1}{1+x^2}$ 。

四、创设口诀记忆公式

在《数学分析》课程中,某些公式或结论可以结合图形,创作一些口诀,使其原本枯燥难记的公式变得生动形象。

在定积分应用中平面图形由两条曲线在区间 D 上围成的面积公式和重积分转化为累次积分中积分 x 型区域与 y 型区域 D 的分解,可创设口诀“对 x 轴作垂线,从左往右移,从下往上看;对 y 轴作垂线,从下往上看,从左往右看”。

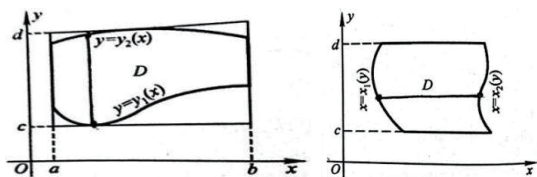


图 1

图 2

在平面图形由两条曲线在 D 围成的面积公式中,如图 1 中 D 的面积可理解为对 x 轴作垂线,与上下两条曲线分别相交两点,从左往右移,扫过的范围为 $[a, b]$ 为积分区间,从下往上看,上面曲线 $y = y_2(x)$ 减去下面曲线 $y = y_1(x)$ 为被积函数,其面积公式为:

$$S = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)] dx.$$

相应地,图 2 中 D 的面积可理解为对 y 轴作垂线,与左右两条曲线分别相交两点,从下往上看,扫过的范围为 $[c, d]$ 为积分区间,从左往右看,右边曲线 $x = x_2(y)$ 减去左边曲线 $x = x_1(y)$ 为被积函数,其面积公式为:

$$S = \int_c^d [x_2(y) - x_1(y)] dy.$$

同时,此口诀也可用于重积分转化为累次积分中区域 D 的分解:在图 1 中,区域 D 为 x 型区域:从左往右移,扫过的范围为

x 的范围,即 $a \leq x \leq b$,从下往上看,大于下面的曲线 $y = y_1(x)$ 小于上面的曲线 $y = y_2(x)$ 为 y 的范围,即 $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$,从而 $D = \{(x, y) | y_2(x) \leq y \leq y_1(x), a \leq x \leq b\}$ 。在图 2 中,区域 D 为 y 型区域,从下往上看,扫过的范围为 y 的范围,即 $c \leq y \leq d$,从左往右看,大于左边的曲线 $x_1(y)$ 小于右边的曲线 $x_2(y)$ 为 x 的范围,即 $x_2(y) \leq x \leq x_1(y)$,从而 $D = \{(x, y) | x_2(y) \leq x \leq x_1(y), c \leq y \leq d\}$ 。

五、利用一元函数与多元函数公式之间的相关性记忆公式

多元函数是一元函数的推广,因此它依旧保留着一元函数的许多性质,某些公式在本质上与一元函数的相关的公式是一样的。

(一) 复合函数求导公式

对于一元函数复合函数求导公式,可以看成外函数的导数乘以以内函数的导数,即 $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$,而对于多元复合函数也可以看成外函数的偏导数与内函数的偏导数的数量积,其中外函数的偏导数与内函数的偏导数均为向量。即 $z = f(u, v), u = u(x, y), v = v(x, y)$ 关于 x 的偏导数 $z_x = z_u \cdot u_x + z_v \cdot v_x = (z_u, z_v) \cdot (u_x, v_x)$,其中外函数偏导数为 (z_u, z_v) ,内函数的偏导数为 (u_x, v_x) 。类似地,可以理解关于 y 的偏导数 $z_y = z_u u_y + z_v v_y = (z_u, z_v) \cdot (u_y, v_y)$ 。

(二) (全)微分公式

对于一元函数的微分公式,可以看成是导数与自变量的微分乘积,而多元函数的全微分可以看成是偏导数组成的向量与自变量的微分组成的向量的数量积。即一元函数 $y = f(x)$ 在 I 上任一点 x 处的微分公式为 $dy = f'(x)dx$,相应地,多元函数 f (以二元函数 $z = f(x, y)$ 为例)在 D 上每一点 $P(x, y)$ 处的全微分的公式为 $dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy = (f_x(x, y), f_y(x, y))(dx, dy)$ 。

六、运用与中学公式的相似性和相关性记忆公式

在高阶导数中,两个函数乘积的 n 阶导数公式,即莱布尼茨

公式: $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$,与中学的二项展开式公式

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{n-k} v^k$$

在形式上高度一致,因此可以通过二项展开式记忆莱布尼茨公式。

不可否认,对于《数学分析》公式的教学,最好的方式是专业教师利用理论依据进行逻辑推导与相关例题详细讲解相结合,然后让学生利用相关习题进行巩固,但是运用一些技巧有效记忆公式,对于学生学习会起到事半功倍的效果,学习效率逐步提升,学习兴趣随之提高。

参考文献:

- [1] 华东师范大学数学系. 数学分析(第五版)[M]. 高等教育出版社, 2019.
- [2] 同济大学数学教研室. 高等数学(上册)(第四版)[M]. 高等教育出版社, 1996.
- [3] 孔辉利. 高等数学[M]. 北京: 冶金工业出版社, 2021.