

# 高温作业服装的最优设计

满燕敏

澳大利亚联邦西澳大利亚州首府珀斯市 澳大利亚科廷大学 6000-6999

**摘要:** 高温作业服装在消防专业和航空航天等领域都具有十分重要的应用。本文以 2018 年全国大学生建模竞赛 A 题为背景, 研究高温作业服装各织物层次的温度分布。利用热传导模型、傅里叶定律、差分方程、(动态)离散化算法和单目标优化模型等数学方法, 建立了高温作业专业服装的各层材料厚度确定下的温度分布模型和满足特定外界温度条件下的最优服装厚度模型。

**关键词:** 温度分布模型; 热传导方程; 单目标优化; 离散化算法; 傅里叶定律

## Optimal design of clothing for high temperature operation

Yanmin Man

Perth, the capital of the Commonwealth of Australia, Western Australia, Curtin University of Australia 6000-6999

**Abstract:** This paper focuses on the important application of high-temperature work clothing in fields such as firefighting and aerospace. Taking the 2018 National College Student Mathematical Modeling Contest Problem A as the background, this paper studies the temperature distribution of various fabric layers in high-temperature work clothing. Using mathematical methods such as heat conduction models, Fourier's law, difference equations, (dynamic) discretization algorithms, and single-objective optimization models, the paper establishes temperature distribution models for high-temperature work clothing with each layer's material thickness determined and an optimal clothing thickness model that meets specific external temperature conditions.

**Keywords:** Temperature distribution model; Heat conduction equation; Single objective optimization; Discrete algorithm; Fourier's law

专业工作人员在消防和航空航天等高温环境下进行工作时, 需要穿着高温作业的专用服装以保护自身, 避免温度过高带来的烧痛感。在通常情况下, 三层织物材料可制作符合要求的高温作业服装, 在本文中, 将这三层织物材料记为第 I、II、III 层, 其中 III 层与人体皮肤之间的空气空隙层记为 IV 层。

研为设计研究出合适的高温作业专用服装, 研究者在实验室中模拟高温环境, 将假人放置其中进行皮肤外侧温度的测量, 该模拟假人的体内温度维持 37℃。为了降低研发成本和周期, 请建立合适的数学模型, 观察假人皮肤外侧的温度分布, 并解决如下问题:

(1) 高温作业专业服装的织物材料存在参数, 其中附件 1 给出了某些参数值, 对高温环境为 75℃、第 II 层织物材料为 6mm、空气间隙层为 5mm、高温作业时间为 90min 的情况进行实验, 附件 2 给出实验结果, 即皮肤外侧的温度分布。建立合适的数学模型, 并生成温度分布 Excel 文件 (文件名为 problem1.xlsx);

(2) 当高温环境处于 65℃、空气间隙层为 5.5mm 时,

请确定 II 层织物材料的最优厚度, 确保当工作人员在高温环境下工作 60 分钟时, 假人皮肤外侧温度在 44℃ - 47℃ 之间的的时间低于 5 分钟;

(3) 当高温环境处于 80℃, 请确定 II 层织物材料和空隙间隙层的最优厚度, 确保当工作人员在高温环境下工作 30 分钟时, 假人皮肤外侧温度在 44℃ - 47℃ 之间的的时间低于 5 分钟。

数据文件说明

- (1) 附件 1. 高温作业专业服装织物材料的参数值;
- (2) 附件 2. 假人皮肤外侧的测量温度。

### 一、模型假设

- (1) 织物均为均匀的各项同性体;
- (2) 假设热量均为垂直进入织物, 且不考虑热辐射和热对流;
- (3) 不考虑服装材质的其他性能参数;
- (4) 不同时刻的热传导率、密度和比热容的变化忽略不计;

(5) 假设服装完整无损坏。

## 二、模型建立与求解

### 2.1 服装材料在实验条件下的温度分布

本节研究专用服装各层厚度分别为 I 层 0.6mm、II 层 6mm、III 层 3.6mm、IV 层 5mm, 外界温度为 75℃, 工作时间为 90 分钟, 体表温度变化已知条件下服装材料各层温度分布。首先依据傅里叶实验定律<sup>[1]</sup>给出了均匀的各项同性体热传导方程, 再根据实际温度和服装各层厚度对热传导方程进行参数修改, 得出以温度为输入输出值的热传导方程模型, 再利用差分法得出相应的温度分布。

#### 2.1.1 热传递过程分析

热传导是指在同一固体材料中, 存在某一部分的温度高于另一部分时, 热量会自动从热量高的一端传向热量低的一端的现象。通常情况下, 导热可分为稳态和非稳态两种热传导过程, 其中, 物体内部的温度恒定不变为稳态导热, 物质横截面的热流量不随时间的变化而变化; 非稳态导热是当时间变化时, 物体内部温度、热流量会不断变化。对于实际生活的研究, 温度在经历了在一定时间的稳定之后, 处于物体内部的温度变化非常小, 所以我们可以近似的认为该物体的导热是稳态导热; 同时忽略某些因素, 将该导热简化认为一维稳态导热, 即是只在唯一坐标轴方向上有温度的梯度变化, 物体的传热也只在这样一个坐标轴方向上进行。

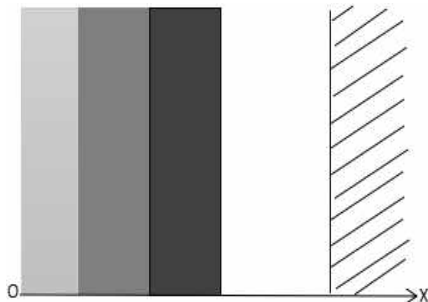


图 2-1 专业服装 - 空气层 - 皮肤系统示意图

对于专业服装 - 空气层 - 皮肤系统, 由于人体的热传递都是沿着垂直于皮肤的方向进行导热, 由上述原理可知, 可将人体的导热视为一维稳态导热<sup>[1]</sup>; 当专业服装处于高温环境时包含热对流和热辐射, 由于第 I 层织物材料阻挡了大部分的热辐射, 因此我们在织物层和假人皮肤传递过程中可以忽略热辐射, 即不考虑存在热辐射的情况, 由于第 IV 层服装材料的厚度一般情况下为 5-6.4 mm 之间, 间隙过小, 故也不考虑存在热对流的情况; 此外, 假设在织物层、空气层、假人皮肤这三者之间都只考虑温度分布是连续变化的、温度梯度是离散的情况, 故本节采用离散方法对问题 (1) 进行计算。

#### 2.1.2 参数分析

热传导率 材料在单位的温度差和时间内通过单位时间和截面积传导的热量为热传导率, 公式为

$$K = \frac{Q}{t} \frac{\Delta x}{(S\Delta T_1)}, \quad (2.1)$$

其中  $K$  为热导率;  $Q$  为热量;  $t$  为时间;  $x$  为长度;  $S$  为面积;  $\Delta T_1$  为温度差。同一物体在相同时间内,  $K$  越大,  $Q$  越大, 而第二层的  $K$  最高, 即热量  $Q$  最大。

比热容 任意一个具有一定质量的物质, 当外界温度升高时, 该物质所改变的热量与质量和温度差的比, 称为比热容, 简称比热。不同物质的比热容也不同, 比热容属于是某物质的特殊性质; 对于相同的物质来说, 通常情况下该物质的比热容与质量和形状无关<sup>[2]</sup>; 其计算公式为:

$$C = \frac{Q}{(m\Delta T_2)}, \quad (2.2)$$

其中  $Q$  -- 热量;  $m$  -- 质量;  $\Delta T_2$  -- 温度差。比热容越大, 物体吸收或放出热量的能力越强, 附件 1 所给出的参数中第 II 层的比热容最大, 则吸收热量最大。

傅立叶定律 傅立叶定律属于传热学, 在基本导热现象中, 给定单位时间内横截面的热量、截面面积, 在热流密度 ( $W/m^2$ ) 表示下计算导热量时, 方程如下:

$$J_T = -K\Delta T = -K\left(\bar{i} \frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad (2.3)$$

其中热流密度的方向垂直于热量的传输方向, 也可以表述如下:

$$Q = -K \frac{d}{d} A, \quad (2.4)$$

其中  $Q$  -- 导热量, 传热面积 ( $A$ ) 的单位为平方米, 温度 ( $T$ ) 的单位为开, 坐标轴  $x$  轴上的单位为米, 故该定了吧的一般数学表达式为:

$$Q_t = -\lambda \frac{d}{d} n. \quad (2.5)$$

#### 2.1.3 模型建立

由于热传导过程可由参数定义等条件得出温度变化的模型, 也可根据傅里叶定律计算其一维热传导过程的方程式, 本节分别建立两个模型, 对两个模型的答案进行相似度比较, 选取最符合实际的热传导过程作为本节的模型。

物理公式推导温度传递模型 因为材料中的每一点在具有初始温度的同属会吸收外界的一部分热量也会放出一部分热量, 则设这一点在这两个时刻改变的温度差为  $\Delta T_2$  (如图 2-2 所示)

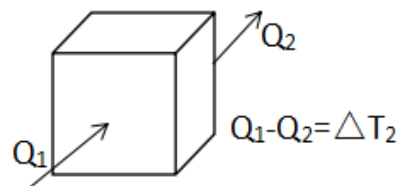


图 2-2  $\Delta T_2$  来源示意图

根据上述热传导过程和参数的分析, 以及各参数的

定义公式, 我们可以由 (2.1) 式直接推出

$$Q = \frac{K \Delta T_i}{\Delta x}, \quad (2.6)$$

其中  $\Delta T_i = T_i^j - T_i^{j-1}$  为两测温点间的温度差,  $\Delta x$  为两测温点间的间距 (步长)。根据密度公式、体积公式, 此处采用单位面积, 可以忽略不计, 我们得出

$$C = \frac{Q}{m \Delta T^j} = \frac{Q}{\rho V \Delta T^j} = \frac{Q}{\rho \Delta x \Delta T^j},$$

$$\Delta T^j = \frac{Q}{C \rho \Delta x} = \frac{K}{C \rho (\Delta x)^2} \Delta T_i, \quad (2.7)$$

其中  $\Delta T_i = T_i^j - T_i^{j-1}$  为两测温点间的温度差,  $\Delta x$  为两测温点间的间距 (步长)。假设当时间  $t = 0$  秒时, 服装材料各层次的初始温度  $T_0$  均为  $37^\circ\text{C}$ , 故有 (模型 I)

$$T_i^j = T_{i-1}^j + \Delta T^j = T_{i-1}^j + \frac{k}{C \rho (\Delta x)^2} \Delta T_i, \quad (i=1, \dots, \frac{5400}{n}), \quad (2.8)$$

其中  $T_i$  为第  $i$  时刻某节点的温度,  $T_{i-1}$  为前时刻该点对应的温度,  $n$  为时间步长。

微分方程模型 且服装材料为均匀的各项同性体, 此时  $K$ 、 $C$  以及  $\rho$  均为常数, 记  $\frac{k_i}{c_i \rho_i} = a_i (i=1,2,3,4)$ , 根据傅里叶定律我们有均匀的各向同性体的热传导方程,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_i \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

进而, 因为各层厚度分别为 I 层 0.6mm、II 层 6mm、III 层 3.6mm、IV 层 5 mm, 共计 15.2 mm, 且当  $t = 0$  时, 第 I 层的初始温度为  $75^\circ\text{C}$ , 因而我们得到高温下织物的热传递模型

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a_i \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (0 < x < 1, t > 0), \\ u|_{t=0} = \varphi(x) (0 < x < 1), \\ u|_{x=0} = u_1(t), u|_{x=1} = u_2(t). \end{cases} \quad (2.9)$$

本文采用有限差分法<sup>[2]</sup>来解决偏微分方程组, 其中, 该偏微方程组以多层织物、空气层、皮肤层作为整体。不存在热辐射和热对流, 因此这是一个线性偏微分方程组, 本文采用显隐式方法<sup>[3]</sup>来解决:

根据一阶热传导方程的差分法思想, 首先在其求解区域 ( $0 \leq x \leq 15.2, t \geq 0$ ) 做矩形网络, 在  $x$  轴上以步长  $\Delta x = 0.2$  把  $[0, 15.2]$  等分 75 份, 以  $\Delta t$  为步长做平行于  $x$  轴的网格线, 上面所作的两族直线交点为  $(x_j, t_n) = (j\Delta x, n\Delta t)$  称为网络节点, 如图 2-3 所示。

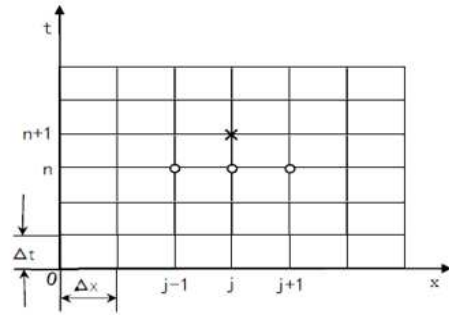


图 2-3 网络节点示意图

用表示  $u_j^n$  表示 (2.9) 的解  $u(x, t)$ , 对任一区域内的节点  $(x_j, t_n)$  利用泰勒展开公式并将 (2.9) 式的初始条件和边界条件分别化为

$$\begin{cases} u_j^0 = \varphi(j\Delta x) (j=1, \dots, 75), \\ u_0^n = u_1(n\Delta t), u_1^n = u_2(n\Delta t), n=0,1,2, \dots \end{cases} \quad (2.10)$$

记  $\lambda_j = a_i \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$  用差分方法求解初边值问题的格式并建终织物层间热传递模型如下:

(模型 II)

$$\begin{cases} U_j^{n+1} = \lambda_j U_{j-1}^n + (1-2\lambda_j) U_j^n + \lambda_j U_{j+1}^n, \\ U_j^0 = \varphi(j\Delta x) \\ U_0^n = u_1(n\Delta t), U_1^n = u_2(n\Delta t), n=0,1,2, \dots \end{cases} \quad (2.11)$$

分别建立四层织物材料的差分方程, 综合以上三层织物材料和空气层的分析。

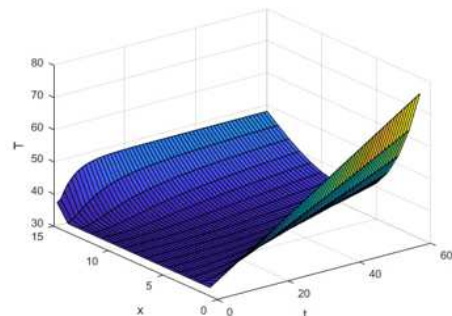


图 2-4 差分方程所求整体温度分布图

利用 Matlab 2017B 软件编程计算可得整个热传导过程后第  $t$  时刻皮肤外表温度  $T_{t4}$ , 以及温度分布图 (见图 2-4)。

#### 2.1.4 算法分析和模型求解

对于模型 I, 要想求得实验 90 分钟后的温度分布, 就需对时间和厚度进行步长划分, 将连续性的温度离散化, 用各单位体积元的温度来离散整个温度模型, 调试出时间和温度的步长, 再进一步计算出固定时间或距离后的温度<sup>[4]</sup>。

由式 (2.7) 可知, 当  $\Delta x$  的值很小时, 其对应的  $Q$  值会无限增大, 则不能随便取  $\Delta x$ , 此处采用程序对  $\Delta x$  经过一系列参数的调试, 将  $t$  的步长划分为 0.1, 则 90 分钟即为 54000 个测温点; 第 I、II、III、IV 层的厚度步长分别为 0.6 mm, 1 mm, 0.9 mm, 2.5 mm, 其测

温点分布如图 2-5 所示。

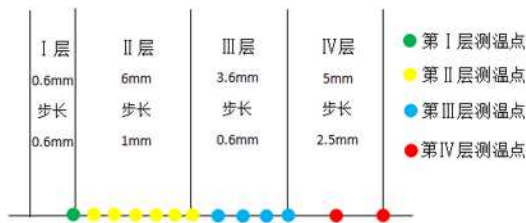


图 2-5 厚度步长分布示意图

假设每一层材料在第一个时间的初始温度  $u_1 - u_4$  分别为  $37^\circ\text{C}$ ，外界温度  $u_0$  为  $75^\circ\text{C}$ ，导入比热容  $C$ 、厚度  $x$ 、热传导率  $K$  和密度  $\rho$  的四层材料字典  $N_{01} - N_{04}$ ，根据时间和距离步长确定观测点个数，新建以时间为测温点个数为行的空间矩阵<sup>[5]</sup>，确定一个距离步长后各个测温点的温度，首先计算外部条件到第一层第一个测温点的  $Q$  值，再计算第一层第二个测温点到最后一个测温点的  $Q$  值，以此类推计算第 II、III、IV 层  $Q$  值；确定一个时间步长后各个测温点的温度  $T$ ，首先计算第一层除最后一个点之外各个测温点的温度，再计算第一层最后一个测温点的温度，以此类推至第 II、III、IV 层的温度，其具体算法步骤为：

Step 1: 将时间和厚度离散化，输入  $n=10$ ，时间步长为  $\frac{1}{n}$ ，输入距离步长，当  $t=0$  时为位置 1，定义每一层的位置函数和温度函数<sup>[6]</sup>；

Step 2: 输入每一层材料的初始温度  $u_1 = \dots = u_4 = 37^\circ\text{C}$ ，外界的温度  $u_0 = 75^\circ\text{C}$ ；

Step 3: 设  $j$  为第  $j$  个位置 ( $j=0, \dots, c(l)$ )， $l$  为层数即  $l$  取值为 1-4，设  $i$  为第  $i$  个时刻 ( $i=1, 2, \dots, \frac{5400}{n}$ )；

Step 4: 确定下一个距离步长后各个测温点的温度，更新温度值，计算第  $l$  层除最后一个点之外各个测温点的温度，计算第  $l$  层最后一个测温点的温度，结束，输出温度，返回 Step 4；

Step 5: 确定下一个时间步长后各个测温点的温度  $T$ ，首先计算第一层除最后一个点之外各个测温点的温度，再计算第一层最后一个测温点的温度，结束，输出温度，返回 Step 5。

最后通过 Matlab 2017B 对算法进行计算，其程序见附录，各点的温度表格见附件，固定距离步长的温度分布图见图 2-6，在距离步长确定的情况下，第 I 层和第 IV 层只有一个节点为二维图像，第 II 层和第 III 层由多个节点为三维图像。

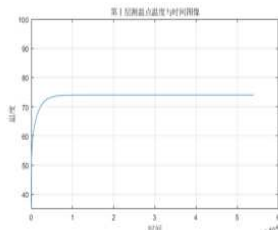


图 2-6 第 I 层测温点温度与时间变化图像

图像第一层的温度随时间点变化规律，由图可知，第 I 层的测温点在前 20 分钟上升较快，之后经历拐点，随后图像逐渐平稳在  $73^\circ\text{C}$ 。

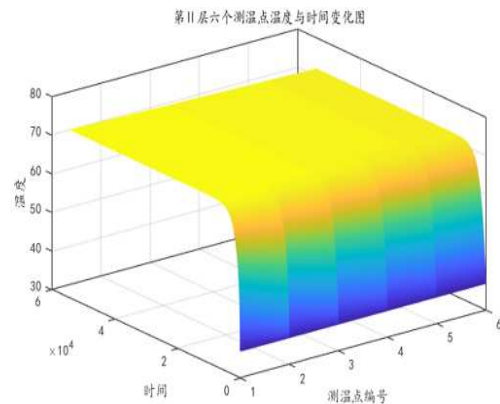


图 2-7 第 II 层测温点温度与时间变化图像

图像第一层的温度随时间点变化规律，由图可知，第 II 层的测温点在前 20 分钟上升较快，之后经历拐点，随后图像逐渐平稳在  $70^\circ\text{C}$ 。

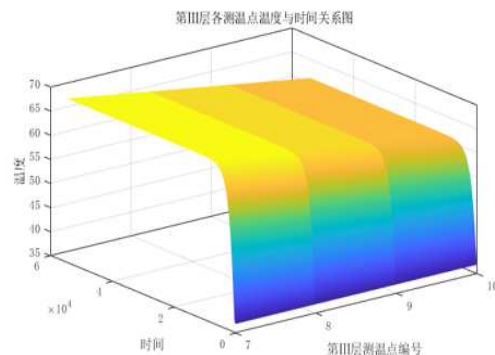


图 2-8 第 III 层测温点温度与时间变化图像

图像第一层的温度随时间点变化规律，由图可知，第 II 层的测温点在前 20 分钟上升较快，之后经历拐点，随后图像逐渐平稳在  $64^\circ\text{C}$ 。

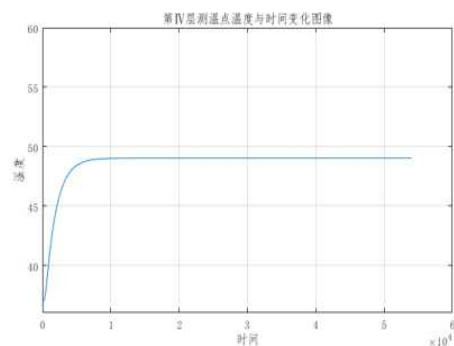


图 2-9 第 IV 层测温点温度与时间变化图像

图像第一层的温度随时间点变化规律，由图可知，第 II 层的测温点在前 20 分钟上升较快，之后经历拐点，随后图像逐渐平稳在  $50^\circ\text{C}$ 。

由图可知，当到达一定时间后，温度与步长无关，

由图像可知, 前 1600 秒温度升高较快, 与附件 2 所给数据结果相似。下面给出固定时间步长后, 13 个节点的温度分布。

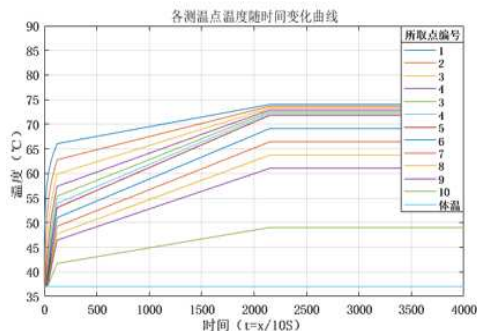


图 2-10 13 个节点随时间变化的温度分布图像

此算法采用了公共中间变量对模型进行求解, 保证了模型的正确性, 同时简化了计算量, 一次性得出所有节点的数值。为验证上述模型 I 的有效性, 此处将第 IV 层的最后一个节点所求得温度与题目中的附件 2 给出的假人外表温度进行比较, 得出数值函数比较图像见图

表 2.1 外界温度 75℃ 下部分节点的温度变化情况

温度	$u_1(1)$	$u_2(2)$	$u_2(4)$	$u_2(6)$	$u_3(2)$	$u_3(4)$	$u_4(1)$
$t_1$	37	37	37	37	37	37	37
$t_{1001}$	64.89228	57.90576	52.87466	50.3288	46.771	44.36487	40.67546
$t_{2001}$	69.25906	65.26581	62.28454	60.59952	56.14806	52.31111	44.65179
$t_{3001}$	71.53215	69.09967	67.19541	65.96777	61.06855	56.49014	46.74311
$t_{4001}$	72.71868	71.10089	69.75884	68.76998	63.63708	58.67165	47.8348
$t_{5001}$	73.33803	72.14552	71.09693	70.2327	64.97783	59.81038	48.40465
$t_{10001}$	73.98816	73.24205	72.50151	71.7681	66.38521	61.00569	49.00282
$t_{11001}$	74.00069	73.2631	72.5285	71.79771	66.41233	61.02872	49.01435
$t_{19001}$	74.01430	73.28613	72.55797	71.82984	66.44179	61.05374	49.02687

其中  $u_i(j)$  表示第  $i$  层织物下第  $j$  个空间节点, 详细表格见附件 problem1.xlsx。

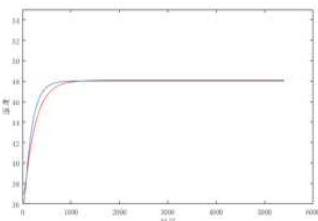


图 2-12 模型 I 计算结果与附件 2 数据比较图像

由图可知, 此算法所求得的结果与附件 2 中的结果相似程度非常高, 步长的选择对结果的影响程度不大, 因此步长的选择对结果的敏感度很弱, 进一步说明本文所建立的模型比较稳定, 科学可行符合实际情况。

2-11。

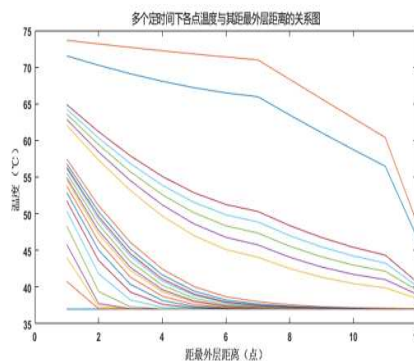


图 2-11 多个定时间下各点温度与外界距离图像

由图可知, 在任何时间条件下, 距外层越远的点, 温度越低, 且每个点温度都会随着时间的变化慢慢升高, 其中变化最显著的为最外侧点, 变化最不显著的是最里层点, 由此我们计算得出部分点和时间的温度变化表格如下:

## 2.2 第 II 层最佳厚度的优化模型

由于在本文中连续性的温度离散化, 故此处采用分阶段的方式分别计算每一层材料热传导结束时的最终温度, 利用模型 I 以第 II 层最优厚度为目标函数, 皮肤外侧的临界温度在 44℃-47℃ 之间的时间在 5 分钟以内为约束条件建立单目标规划模型。

第 I 层 当外界温度为 65℃ 时, 有  $T_0 = 6$  °C, 由附件 1 可知第 I 层的厚度为 0.6mm, 且根据问题 (1) 对步长的分析可知, 第 I 层只有一个节点, 则采用模型 I 可以得到

$$T_i^{0.6} = T_0 + \Delta T_i^p, \quad (2.12)$$

第 II 层 经过式 (2.12) 得到的  $T_i^{0.6}$  作为第二阶段的初始温度, 设第 II 层的厚度为  $h$ , 且根据问题 (1) 对步长的分析可知, 第 II 层的步长为 1mm, 当第 II 层的厚度为  $h$  时可以在第 II 层作出  $h$  个节点, 则温度从第 II 层第一个节点向第二个节点传导的方程为

$$T_i^{0.6+n} = T_i^{0.6} + \Delta T_i^q, \quad (2.13)$$

当总共有  $h$  个节点时, 以上述公式类推, 可得到第二阶段的一般形式为

$$T_i^{0.6+n} = T_i^{0.6+(n-1)} + \Delta T_i^q, n=1, \dots, h, \quad (2.14)$$

此时给出第 II 层最后一个节点的方程如下, 并将其得到的结果作为第 III 层的初始温度, 同 (2.14) 式。

第 III 层 经过式 (2.14) 得到的  $T_i^{0.6+h}$  作为第三阶段的初始温度, 由附件 1 可知第 III 层的厚度为 3.6mm, 且根据问题 (1) 对步长的分析可知, 第 III 层的步长为 0.9mm, 当第 III 层的厚度为 3.6mm 时可以在第 III 层作出 4 个节点, 则温度从第 III 层第一个节点向第二个节点传导的方程为

$$T_i^{0.6+h+0.9} = T_i^{0.6+h} + \Delta T_i^v, \quad (2.15)$$

当总共有 4 个节点时, 以上述公式类推, 可得到第三阶段的一般形式为

$$T_i^{0.6+h+0.9m} = T_i^{0.6+h+0.9(m-1)} + \Delta T_i^v, (m=1, \dots, 4) \quad (2.16)$$

此时给出第 III 层最后一个节点的方程如下, 并将其得到的结果作为第 IV 层的初始温度

$$T_i^{0.6+h+3.6} = T_i^{0.6+h+2.7} + \Delta T_i^q. \quad (2.17)$$

第 IV 层 经过式 (2.17) 得到的  $T_i^{0.6+h+3.6}$  作为第三阶段的初始温度, 由题目条件可知第 IV 层的厚度为 5.5mm, 此时分析其步长特点将其令为 1.1mm, 当第 IV 层的厚度为 5.5mm 时可作出 5 个节点, 则温度从第 IV 层第一个节点向第二个节点传导的方程为

$$T_i^{0.6+h+3.6+1.1} = T_i^{0.6+h+3.6} + \Delta T_i^j, \quad (2.18)$$

当总共有 4 个节点时, 以上述公式类推, 可得到第三阶段的一般形式为

$$T_i^{0.6+h+3.6+1.1k} = T_i^{0.6+h+3.6+1.1(k-1)} + \Delta T_i^j, (j=1, \dots, 5) \quad (2.19)$$

此时给出第 IV 层最后一个节点的方程如下

$$T_i^{0.6+h+3.6+5.5} = T_i^{0.6+h+3.6+4.4} + \Delta T_i^j. \quad (2.20)$$

对于上述阶段,  $p$ 、 $q$ 、 $v$ 、 $j$  分别表示第  $p$ 、 $q$ 、 $v$ 、 $j$  个位置, 且  $p < q < v < j$ ,  $p$ 、 $q$ 、 $v$ 、 $j \in (9.1+h)$ 。

综上所述所有条件, 以  $h$  的最小值作为目标函数, 假人皮肤外表温度低于  $47^\circ\text{C}$ , 且大于  $44^\circ\text{C}$  的时间在 5 分钟以内作为限制条件, 建立第 II 层的厚度  $h$  的单目标优化模型如下:

(模型 III)

$$\begin{aligned} \min H = h \\ \text{s.t.} \begin{cases} 44 \leq T_{3600}^{9.1+h} \leq 47, \\ (2.12)-(2.14)-(2.17)-(2.20), \\ 0.6 \leq h \leq 25, \\ t < 300. \end{cases} \quad (2.21) \end{aligned}$$

其中  $t$  表示皮肤外侧温度超过  $44^\circ\text{C}$  的总时间, 通过 Matlab 2017B 对模型进行编程 (程序见附录), 经过软件

计算, 得出第 II 层的最佳厚度  $h$  为 2.6mm, 在第 II 层的材料厚度确定的情况下其最佳的温度分布情况如下图:

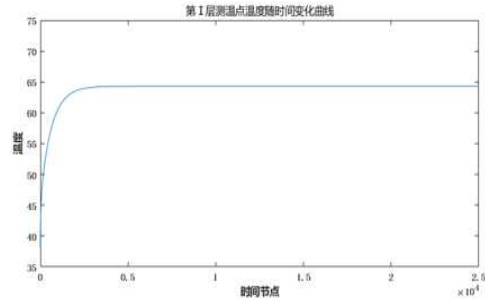


图 2-13 第 I 层测温点温度与时间变化图像

当外界温度为  $65^\circ\text{C}$ , 第 II 层的最佳厚度  $h$  为 2.6mm 时, 图像表示了第 I 层各测温点的温度随时间的变化, 根据图像可知, 第 I 层的测温点前 20 分钟变化较快, 在大概 20 分钟的时候就经历拐点, 随后图像逐渐平稳在  $65^\circ\text{C}$  左右。

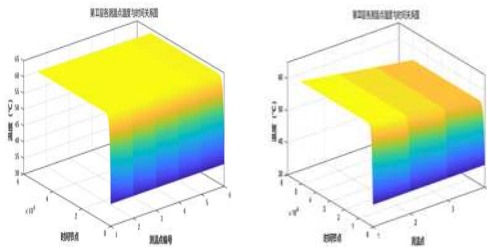


图 2-14 第 II, III 层测温点温度与时间变化图像

当外界温度为  $65^\circ\text{C}$ , 第 II 层的最佳厚度  $h$  false 为 2.6mm 时, 图像表示了第 II 层各测温点的温度随时间的变化, 根据图像可知, 第 II 层的测温点前 20 分钟变化较快, 在大概 20 分钟的时候就经历拐点, 随后图像逐渐平稳在  $70^\circ\text{C}$  左右。第 III 层各测温点的温度随时间的变化, 根据图像可知, 第 III 层的测温点前 20 分钟变化较快, 在大概 20 分钟的时候就经历拐点, 随后图像逐渐平稳在  $63^\circ\text{C}$  左右。

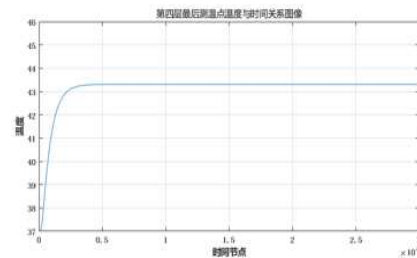


图 2-15 第 IV 层测温点温度与时间变化图像

当外界温度为  $65^\circ\text{C}$ , 第 II 层的最佳厚度  $h$  为 2.6mm 时, 图像表示了第 IV 层各测温点的温度随时间的变化, 根据图像可知, 第 IV 层的测温点前 20 分钟变化较快, 在大概 20 分钟的时候就经历拐点, 随后图像逐渐平稳在  $43.5^\circ\text{C}$  左右。

由图可知, 当第 II 层的厚度为 2.6mm 时, 与问题 (1) 相似, 当达到一定的时间之后, 无论去多少距离为步长, 温度均呈现平衡状态, 且通过最后得出的外表皮肤温度

与附件 2 所给数据结果相似, 故此厚度合理。下面给出固定温度传递的时间步长, 选取所有离散化后的节点温度随时间变化的图像, 选取几个特定时间计算其温度分布。

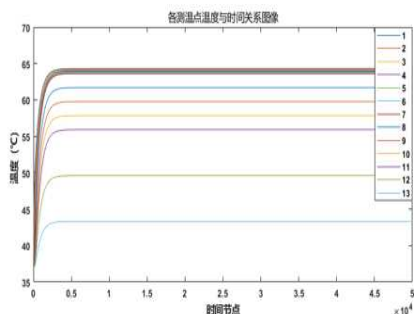


图 2-16 13 个节点随时间变化的温度分布图像

分析上图的各节点曲线, 从上往下分别为最外侧到体表的温度变化, 其变化的趋势大致相同, 具有合理性, 且从外到内温度逐步降低, 该节点相比较上一时间的温

度在升高, 符合附件 2 的数据趋势, 故我们认为第 II 层的厚度为 2.6mm 合理。

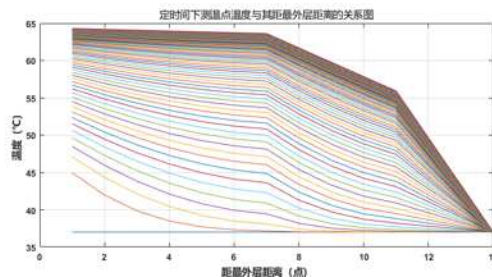


图 2-17 65℃下的多个定时间点的各温度变化图

当环境温度为 65℃时, 在任何时间条件下, 距外层越远的点温度越低, 且每个点都会随着时间的变化慢慢升高, 其中变化最显著的为最外侧点, 变化最不显著的是最里层点, 由此我们计算得出部分点和时间的温度变化表格如下。

表 2.2 外界温度 65℃下部分节点的温度变化情况

温度	$u_1(1)$	$u_2(2)$	$u_2(4)$	$u_2(6)$	$u_3(2)$	$u_3(4)$	$u_4(1)$
$t_{10}$	45.61051	37.0001	37	37	37	37	37
$t_{1700}$	58.65152	42.59164	37.71003	37.05813	37.03634	37.02514	37.0167
$t_{6820}$	31.32314	50.80546	43.61316	40.43543	39.8223	39.29737	38.53095
$t_{11830}$	62.21469	54.12556	48.05776	44.93905	43.68752	42.51395	40.67541
$t_{19330}$	60.01214	57.20267	52.64517	49.9774	48.03188	46.13768	43.09142
$t_{23550}$	63.32193	58.40373	54.45966	51.98838	49.76672	47.58512	44.05646
$t_{24001}$	64.2954	64.0698	63.8442	63.6187	59.7669	55.9151	49.6100
$t_{25001}$	64.2954	64.0698	63.8442	63.6187	59.7669	55.9151	49.6100
$t_{26001}$	64.2954	64.0698	63.8442	63.6187	59.7669	55.9151	49.6100

综上, 建立关于  $h$  的优化模型, 编写程序进行求解得:  $h = 2.6\text{mm}$ 。

### 2.3 II 层和 IV 层的最优厚度研究

2.3 即在 2.2 的基础上, 将第 IV 层的厚度也设为未知量  $h'$ , 即以第 II、IV 层织物材料的最小厚度作为目标函数, 当消防工作在 30 分钟左右时, 以  $H = h + h'$  最小作为目标函数, 假人皮肤外表温度低于 47℃, 且大于 44℃的时间在 5 分钟以内作为限制条件建立优化模型, 结合遗传算法给出具体求解程序。

针对 II 层和 IV 层的最优厚度研究, 我们采取和 2.2 相同的解法, 加入限制条件<sup>[6]</sup>, 重新编写程序。由于前三层和 2.2 中形式相同, 故可用式 (2.12) - (2.20) 作为前三层的温度分布函数。但由于第 IV 层厚度未知, 假设厚度为  $h'$ , 则第 IV 层共有则温度从第 IV 层第一个节

点向第二个节点传导的方程为

$$T_i^{0.6+H+3.6+2.5i} = T_i^{0.6+h+3.6} + \Delta T_i^j \quad (2.22)$$

当总共有 4 个节点时, 以上述公式类推, 可得到第三阶段的一般形式为

$$T_i^{0.6+H+3.6+2.5j} = T_i^{0.6+h+3.6+2.5(j-1)} + \Delta T_i^j, (j=1, \dots, \frac{h'}{2.5}) \quad (2.23)$$

此时给出第 IV 层最后一个节点的方程如下

$$T_i^{0.6+H+3.6+\frac{h'}{2.5}} = T_i^{0.6+h+3.6+2.5(h'-2.5)} \quad (2.24)$$

综上所述所有条件, 以  $h$  和  $h'$  的最小值作为目标函数, 外表温度处于 44℃—47℃的时间在 5 分钟以内为约束条件, 由于多目标规划计算复杂, 此处采用加权的方式, 令  $H = \lambda_1 h + \lambda_2 h'$  建立关于  $H$  的优化模型如下

(模型 IV)

$$\begin{cases} \min H = \lambda_1 h + \lambda_2 h' \\ 44 \leq T_{1800}^{1.2+h+h'} \leq 47, \\ (2.12) - (2.14) - (2.17) - (2.24), \\ s.t. \begin{cases} 0.6 \leq h \leq 25, \\ 0.6 \leq h' \leq 6.4, \\ t < 300, \lambda_1, \lambda_2 > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (2.25)$$

其中  $t$  表示皮肤外侧温度超过  $44^\circ\text{C}$  的总时间, 通过对目标函数进行加权平均, 可以有效的计算第 II 层和第 IV 层的最佳厚度, 不存在多变量高次方程的情况。

Matlab 2017B 对模型进行编程 (程序见附录), 其流程图见图 2-18,

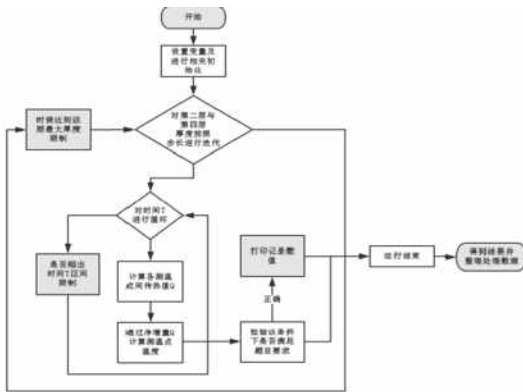


图 2-18 模型 IV 计算流程图

通过编程实现对目标函数的求解, 其程序流程图见图 4-18, 解得第 II 层厚度  $h = 13.6\text{mm}$ , 第 IV 层厚度  $h' = 3.7\text{mm}$ .

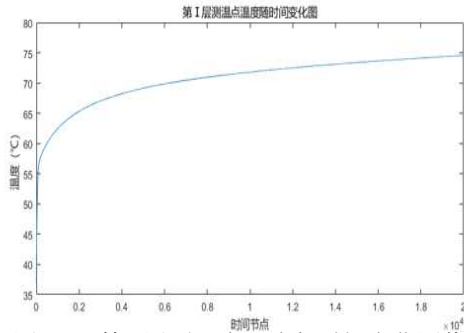


图 2-19 第 I 层测温点温度与时间变化图像

当外界温度为  $65^\circ\text{C}$ , 第 II 层的最佳厚度  $h$  为  $2.6\text{mm}$  时, 图像表示了第 I 层各测温点的温度随时间的变化, 根据图像可知, 第 I 层的测温点前 20 分钟变化较快, 在大概 20 分钟的时候就经历拐点, 随后图像逐渐平稳在  $65^\circ\text{C}$  左右。

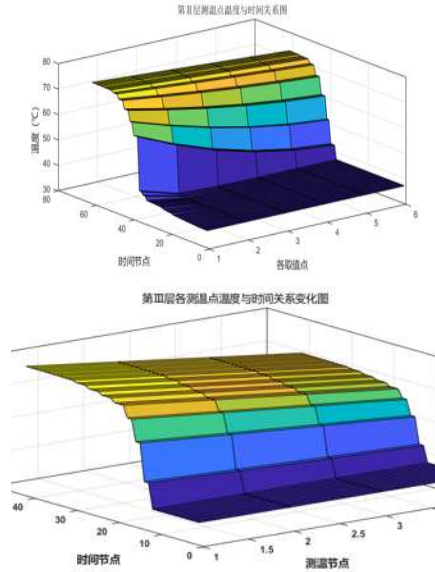


图 2-20 第 II, III 层测温点温度与时间变化图像

当外界温度为  $65^\circ\text{C}$ , 第 II 层的最佳厚度  $h$  为  $2.6\text{mm}$  时, 图像表示了第 II 层各测温点的温度随时间的变化, 根据图像可知, 第 II、III 层的测温点前 20 分钟变化较快, 在大概 20 分钟后经历拐点, 随后分别逐渐平稳在  $70^\circ\text{C}$ 、 $63^\circ\text{C}$  左右。

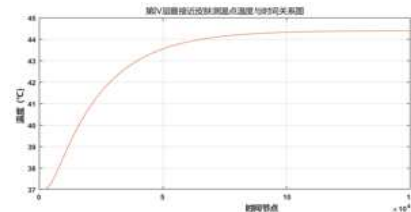


图 2-21 第 IV 层测温点温度与时间变化图像

当外界温度为  $65^\circ\text{C}$ , 第 II 层的最佳厚度  $h$  为  $2.6\text{mm}$  时, 图像表示了第 II 层各测温点的温度随时间的变化, 根据图像可知, 第 II、III 层的测温点前 20 分钟变化较快, 在大概 20 分钟后经历拐点, 随后分别逐渐平稳在  $43.5^\circ\text{C}$  左右, 并根据计算的结果, 作出在多个时间节点下, 各点的温度与外界距离的图像 (图 2-22)。

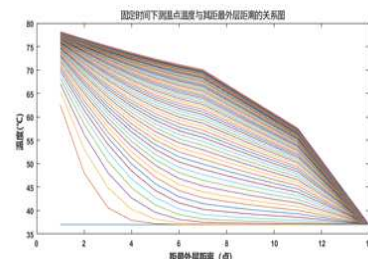


图 2-22  $80^\circ\text{C}$  下的多个定时间点的各温度变化图

在任何时间条件下, 距外层越远的点温度越低, 且每个点都会随着时间的变化温度慢慢升高, 其中变化最显著的为最外侧点, 变化最不显著的是最里层点, 由此我们计算得出部分点和时间的温度变化表格如下。



表 2.2 外界温度 80℃下部分节点的温度变化情况

温度	$u_1(1)$	$u_2(2)$	$u_2(4)$	$u_2(6)$	$u_3(2)$	$u_3(4)$	$u_4(1)$
$t_{360}$	63.68446	37.10722	37.00008	37	37	37	37
$t_{8880}$	71.69167	49.4896	39.73768	37.47192	37.33932	37.25744	37.17126
$t_{19260}$	73.9238	56.67946	45.44722	40.80874	40.10006	39.52083	38.67956
$t_{29640}$	75.01795	60.63553	50.24058	45.26305	43.91805	42.70819	40.80442
$t_{41120}$	75.82271	63.0089	54.57062	49.84163	47.87399	46.02394	43.01505
$t_{61470}$	76.83289	67.5837	60.3679	56.22094	53.39835	50.65954	46.10571
$t_{64001}$	78.22110	75.29480	72.64174	70.37669	64.0441	57.74456	50.8295
$t_{65001}$	78.24713	75.36194	72.73708	70.4818	64.1313	57.81221	50.87470
$t_{66001}$	78.27193	75.42591	72.82792	70.5821	64.21447	57.87669	50.91770
$t_{67001}$	78.29556	75.48685	72.91446	70.67763	64.2936	57.93813	50.9586
$t_{68001}$	78.31807	75.54492	72.99691	70.768616	64.36908	57.99668	50.99770
$t_{69001}$	78.33952	75.600242	73.07547	70.85530	64.44095	58.05245	51.0341
$t_{70001}$	78.35995	75.65295	73.150321	70.93789	64.50943	58.10559	51.07032

综上, 建立关于  $h$  和  $h'$  的优化模型, 编写程序进行求解, 可以达到降低研发成本、缩短研发周期的目的的结果为:  $h = 13.6\text{mm}$ 、 $h' = 3.7\text{mm}$ 。

### 三、结束语

在高温条件下, 本文对已有的热防护服热传递模型进行了改进, 并且相应的实验数据进行比对, 说明模型的合理性。其中, 离散化是十分方便的方式, 不仅可以有效的忽略某些数据的不足, 还保证了模型结果的稳定普遍性。对于某些非线性关系的变量数据来说, 可以用离散化的方式来处理连续性的变量, 并重新定义部分取值, 分别确定各个变量间的联系, 这样使得自变量与因变量间的关系更清晰明了, 提高模型的灵活度。

本文的所有模型和算法都是在假设所有的材料都是均匀且各向同性的, 只考虑了空气层和织物厚度对防护效果的影响, 而在实际问题中, 会存在一定的热辐射和热对流<sup>[7]</sup>, 且服装材料不一定是均匀的, 可以在考虑热辐射和热对流的情况下建立模型和算法, 还可以引入对服装使用年限等的分析<sup>[8]</sup>, 使模型计算更加具有普遍性和时效性, 再者如何优化参数来提高热防护服防护效能将是下一步研究的方向。

### 参考文献:

[1] 朱方龙. 服装的热防护功能 [M]. 北京: 中国纺织

出版社, 2015.

[2] 谭永基, 蔡志杰. 数学规模 [M]. 上海: 复旦大学出版社, 2005.

[3] 潘斌. 热防护服装热传递数学建模及参数决定反问题 [D]. 浙江: 浙江理工大学, 2017.

[4] 王琦. MATLAB 基础与应用实例集粹 [M]. 北京: 人民邮电出版社, 2007.

[5] 谷超豪, 李大潜, 陈恕行. 数学物理方程 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2012.

[6] 刘宝成, 赵晓明. 生化防护服的研究现状及发展趋势 [J]. 成都纺织高等专科学校学报, 2016, 33(4):216-219.

[7] 陈思, 卢业虎, 戴晓群, 王敏. 高温液体及蒸汽防护服装防护性能研究进展 [J]. 纺织学报, 2018, 39(5): 144-149.

[8] 刘洪凤, 张富丽. 蒸汽防护装的性能要求及研究现状 [J]. 上海纺织科技, 2012, 40(5):14-15.

作者简介: 满燕敏, 数学科学学院数学与应用数学专业 2016 级, 性别: 女 学历: 博士在读, 籍贯 (省市): 重庆, 民族: 汉, 出生日期: 1998.01.07, 工作单位: 澳大利亚科廷大学, 单位级别: QS 前 200 研究方向: 运筹学与系统控制

指导教师 赵克全