

应用于组合达曼光栅设计理论的严格耦合波分析法

张 威 金陵同悦 马 帅 刘长宝
江苏星浪光学有限公司 江苏高邮 225600

摘要: 文中梳理了江苏星浪光学仪器有限公司与周常河教授课题组合作的组合达曼光栅专利技术的基础原理, 及其基于严格耦合波分析(RCWA)算法的光栅设计理论。简要概括了二元光学元件的基础衍射理论, 介绍了夫琅禾费和非涅尔近场表达式。推演了达曼光栅核心设计算法——严格耦合波分析以及边界匹配条件的求解过程。

关键词: 维亚波长光栅; 严格耦合波分析(RCWA)理论; 数值稳定性

Rigorous coupled wave analysis applied to combined Daman grating design theory

Wei Zhang, Lingtongyue Jin, Shuai Ma, Changbao Liu
Jiangsu Xinglang Optical Co., Ltd. Jiangsu Gaoyou 225600

Abstract: This paper summarizes the basic principles of the combined Daman grating patent technology of Jiangsu Xinglang Optical Instrument Co., Ltd. and Professor Zhou Changhe, and its grating design theory based on a Rigorous Coupled Wave Analysis (RCWA) algorithm. The underlying diffraction theory of binary optical elements is briefly summarized, and the Fraunhofer and Fresnel near-field expressions are introduced. The analysis of the core design algorithm —— Rigorous Coupled Wave Analysis and solving process of boundary matching conditions.

Keywords: subwavelength grating; Rigorous coupled wave analysis (RCWA) theory; numerical stability

引言:

达曼光栅是种应用于高效生成一维或二维相同强度光点阵列的二元相位光学衍射元件, 其概念最早由 Dammann 和 Görtler 在 1971 年提出——将一个单一的输入对象通过一种特殊的衍射光栅呈现出多图像^{[1][2]}。二元光学元件的产生是为满足传统光学元件难以实现的对于小型化、阵列化和集成化等方面的新需求。达曼光栅属于二元光学中最具代表性的一种光学元件, 得益于半导体产业的飞速突破和进步, 用于制作二元光学元件上连续浮雕结构的光刻工艺逐渐成熟, 达曼光栅结构改进有效降低了其工艺制造难度, 其相位光栅的属性保证了低光能损耗、高衍射效率以及低分束成本, 在分束技术、激光技术、探测技术、光学元件测量技术等多领域有重大应用价值^{[1][4]}。2017 年——2019 年, 江苏星浪光学仪器有限公司通过中科院上海光学精密仪器研究所引进周常河教授, 合作进行了以组合达曼光栅技术为核心的“3D 人脸识别光引擎用核心组件研发及产业化”项目。本论文以该项目为契机, 先简要介绍光学衍射的基本概

念和基础衍射光强算法, 再结合 Raymond^[3], Chateau & Hugonin^[4], Monica & David^[5] 和周常河教授^[4] 的光栅衍射算法方式, 对本项目达曼光栅核心算法严格耦合波分析进行独立的分析和推演, 通过边界条件得出设计结果, 总结基于严格耦合波分析法的组合达曼光栅专利技术的矢量达曼光栅设计理论。

1 夫琅禾费衍射和非涅耳衍射

菲涅尔衍射公式为:

$$E(x, y) \propto \mathcal{F} \left\{ U(\xi, \eta) e^{j \frac{k}{2z} (\xi^2 + \eta^2)} \right\} \quad (1.3)$$

加入夫琅禾费近似条件, 令 $z \gg \frac{k}{2} (\xi^2 + \eta^2)$, 可简化得到夫琅禾费衍射公式:

$$E(x, y) \propto \mathcal{F} \{ U(\xi, \eta) \} \quad (1.4)$$

假设光波透过不透明衍射屏 (ξ, η) 的孔径 P_1 (x_1, y_1) 衍射到距离 z 的观察屏 P_0 (x_0, y_0), 可得出 P_0 至 P_1 的直线距离为:

$$r = \sqrt{z^2 + (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$$

$$= z \sqrt{1 + \frac{(x_0 - x_1)^2}{z^2} + \frac{(y_0 - y_1)^2}{z^2}} \quad (1.5)$$

令 $z \gg (x, y)$, $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$, 则 r 可取近似值为:

$$r = z + \frac{(x_0 - x_1)^2}{2z} + \frac{(y_0 - y_1)^2}{2z} \quad (1.6)$$

代入式 1.3, 可得到菲涅尔近似表达式:

$$U_0(x_0, y_0) = -j \frac{k}{2\pi z} e^{jkz} \iint_{-\infty}^{\infty} U(x_1, y_1) e^{j \frac{k}{2z} [(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2]} dx_1 dy_1 \quad (1.7)$$

当 z 满足 $z \gg \frac{k}{2}(x^2 + y^2)$ 的条件时, 可得到夫琅禾费近似表达式:

$$U_0(x_0, y_0) = -j \frac{k}{2\pi z} e^{jkz} \iint_{-\infty}^{\infty} U(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \quad (1.8)$$

2 光栅衍射的严格耦合波分析法

将衍射区域分为三部分, 如图 1 所示, 区域 I 为入射区域, 中间为光栅区域, 透过光栅部分为区域 II。光栅厚度为 d , 一个光栅周期为 Λ 。

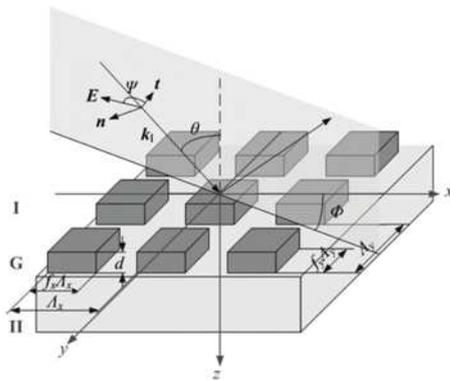


图 1 任意光束摄入光栅立体视角图 (C. Dewei, 2004)

2.1 傅里叶展开式

将光栅区沿着 z 轴方向分布的介质看作均质介质, 光栅区域介质可视为 x 轴方向和 y 轴方向的非均质周期性分布 (图 1), 光栅区域介电常数 ϵ_r 以及磁导率 μ_r 可以分别用傅里叶展开式表达为:

$$\epsilon_r(x, y) = \sum_{m,n} a_{m,n} e^{j \left(\frac{2\pi m x}{\Lambda_x} + \frac{2\pi n y}{\Lambda_y} \right)}, \quad m, n \in (\infty, -\infty) \quad (2.1.51)$$

$$a_{m,n} = \frac{1}{\Lambda_x \Lambda_y} \iint_{\frac{\Lambda_x}{2}, \frac{\Lambda_y}{2}}^{\frac{\Lambda_x}{2}, \frac{\Lambda_y}{2}} \epsilon_r(x, y) e^{j \left(\frac{2\pi m x}{\Lambda_x} + \frac{2\pi n y}{\Lambda_y} \right)} dx dy$$

$$\mu_r(x, y) = \sum_{m,n} b_{m,n} e^{j \left(\frac{2\pi m x}{\Lambda_x} + \frac{2\pi n y}{\Lambda_y} \right)}, \quad m, n \in (\infty, -\infty) \quad (2.1.52)$$

$$b_{m,n} = \frac{1}{\Lambda_x \Lambda_y} \iint_{\frac{\Lambda_x}{2}, \frac{\Lambda_y}{2}}^{\frac{\Lambda_x}{2}, \frac{\Lambda_y}{2}} \mu_r(x, y) e^{j \left(\frac{2\pi m x}{\Lambda_x} + \frac{2\pi n y}{\Lambda_y} \right)} dx dy$$

一束任意入射角为 θ 的光线 k_i 射入光栅坐标系中, 与 $x-z$ 平面形成的夹角为 Φ , 其电场和磁场各自的 x, y, z 方向上的傅里叶展开式可以用空间所有谐波总和来表达, $m, n \in (\infty, -\infty)$:

$$\begin{cases} E_x(x, y, z) = \sum_{m,n} S_{x,m,n}(z) e^{-j(xk_{x,m} - yk_{y,n})} \\ E_y(x, y, z) = \sum_{m,n} S_{y,m,n}(z) e^{-j(xk_{x,m} - yk_{y,n})} \end{cases} \quad (2.1.53)$$

$$\begin{cases} E_z(x, y, z) = \sum_{m,n} S_{z,m,n}(z) e^{-j(xk_{x,m} - yk_{y,n})} \\ H_x(x, y, z) = \sum_{m,n} U_{x,m,n}(z) e^{-j(xk_{x,m} - yk_{y,n})} \\ H_y(x, y, z) = \sum_{m,n} U_{y,m,n}(z) e^{-j(xk_{x,m} - yk_{y,n})} \\ H_z(x, y, z) = \sum_{m,n} U_{z,m,n}(z) e^{-j(xk_{x,m} - yk_{y,n})} \end{cases} \quad (2.1.54)$$

将式 2.1.51、2.1.52 和 2.1.54 分别带入麦克斯韦方程式分量表达式, 原本多元函数相互消除变成 z 变量的单变量函数, 同时, ϵ_r, μ_r, a 和 b 都是不含变量 z 的方程式, 六个分量傅里叶展开式经过简化后可得到如下电场分量和磁场分量的傅里叶展开表达式, $S_{x, y, z}$ 是电场在三个坐标轴上的振幅矢量, $U_{x, y, z}$ 是磁场振幅矢量^[3]。

$$\begin{cases} -jk_{y(m,n)} S_z(m, n, z) - S_y(m, n, z) \frac{d}{dz} = k_0 \sum_{q,r} b_{m-q, n-r} U_x(q, r, z) \\ jk_{x(m,n)} S_z(m, n, z) + S_x(m, n, z) \frac{d}{dz} = k_0 \sum_{q,r} b_{m-q, n-r} U_y(q, r, z) \\ jk_{y(m,n)} S_x(m, n, z) - jk_{x(m,n)} S_y(m, n, z) = k_0 \sum_{q,r} b_{m-q, n-r} U_z(q, r, z) \end{cases} \quad (2.1.5)$$

$$\begin{cases} -jk_{y(m,n)} U_z(m, n, z) - U_y(m, n, z) \frac{d}{dz} = k_0 \sum_{q,r} a_{m-q, n-r} S_x(q, r, z) \\ jk_{x(m,n)} U_z(m, n, z) + U_x(m, n, z) \frac{d}{dz} = k_0 \sum_{q,r} a_{m-q, n-r} S_y(q, r, z) \\ jk_{y(m,n)} U_x(m, n, z) - jk_{x(m,n)} U_y(m, n, z) = k_0 \sum_{q,r} a_{m-q, n-r} S_z(q, r, z) \end{cases} \quad (2.1.6)$$

2.2 矩阵方程组

为简化傅里叶展开式, 将光波矢量 k_x, k_y, k_z 和唯一变量 z 进行归一化处理。2.1 中表达式包括全部的谐波组合 (m, n) , 为下面进一步降低计算复杂程度, 将归一后表达式转换为如下矩阵方程组:

$$\begin{cases} -j\tilde{K}_y s_z - \frac{ds_y}{dz} = \mu_r \mu_x \\ \frac{ds_x}{dz} + j\tilde{K}_x s_z = \mu_r \mu_y \\ \tilde{K}_x s_y - \tilde{K}_y s_x = j\mu_r \mu_z \end{cases} \quad (2.2.1)$$

$$\begin{cases} -j\tilde{K}_y u_z - \frac{du_y}{dz} = \varepsilon_r s_x \\ \frac{du_x}{dz} + j\tilde{K}_x u_z = \varepsilon_r s_y \\ \tilde{K}_x u_y - \tilde{K}_y u_x = j\varepsilon_r s_z \end{cases} \quad (2.2.2)$$

其中 \tilde{K} 为对角对称矩阵:

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{k}(1,1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{k}(1,2) & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \tilde{k}(M,N) \end{bmatrix}$$

$$u = [U(1,1) \ U(1,2) \ \dots \ U(M,N)]^{-1},$$

$$s = [S(1,1) \ S(1,2) \ \dots \ S(M,N)]^{-1}$$

分别将式2.2.1和2.2.2中的 $s_z = -j\varepsilon_r^{-1}(\tilde{K}_x u_y - \tilde{K}_y u_x)$,

和 $u_z = -j\mu_r^{-1}(\tilde{K}_x s_y - \tilde{K}_y s_x)$ 带入电场和磁场矩阵方程式的前两项,可化简得到如下矩阵:

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \end{bmatrix} \quad (2.2.3)$$

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \quad (2.2.4)$$

$$Q = \begin{bmatrix} \tilde{K}_x \mu_r^{-1} \tilde{K}_y & \varepsilon_r - \tilde{K}_x \mu_r^{-1} \tilde{K}_x \\ \tilde{K}_y \mu_r^{-1} \tilde{K}_y - \varepsilon_r & -\tilde{K}_y \mu_r^{-1} \tilde{K}_x \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} \tilde{K}_x \varepsilon_r^{-1} \tilde{K}_y & \mu_r - \tilde{K}_x \varepsilon_r^{-1} \tilde{K}_x \\ \tilde{K}_y \varepsilon_r^{-1} \tilde{K}_y - \mu_r & -\tilde{K}_y \varepsilon_r^{-1} \tilde{K}_x \end{bmatrix}$$

运用传递矩阵(TMM)公式 $f(A) = Wf(\lambda)W^{-1}$ 求出电场和磁场的矩阵表达式:

$$\begin{bmatrix} s_x(\tilde{z}) \\ s_y(\tilde{z}) \end{bmatrix} = W e^{-\lambda \tilde{z}} c^+ + W e^{\lambda \tilde{z}} c^- \quad (2.2.5)$$

$$\begin{bmatrix} u_x(\tilde{z}) \\ u_y(\tilde{z}) \end{bmatrix} = -V e^{-\lambda \tilde{z}} c^+ + V e^{\lambda \tilde{z}} c^- \quad (2.2.6)$$

将解得的电场和磁场合并,得到便于运算的矩阵方程组:

$$\psi(\tilde{z}) = \begin{bmatrix} s_x(\tilde{z}) \\ s_y(\tilde{z}) \\ u_x(\tilde{z}) \\ u_y(\tilde{z}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W & W \\ -V & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\lambda \tilde{z}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{\lambda \tilde{z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c^+ \\ c^- \end{bmatrix} \quad (2.2.7)$$

并且 $V = QW\lambda^{-1}$

2.3 边界条件匹配

式2.2.7得出严格耦合波的矩阵方程组,然矢量系数 c 仍是未知数,需通过下一步边界条件匹配计算得出。入射矢量光波 k 依次通过区域I和区域G之间的边界1,区域G和区域II之间的边界2。区域G为图1所示的光栅区域,令长度为 d 。

根据式2.2.7,第 i^{th} 层衍射的表达式为:

$$\psi_i(\tilde{z}) = \begin{bmatrix} s_{x,i}(\tilde{z}) \\ s_{y,i}(\tilde{z}) \\ u_{x,i}(\tilde{z}) \\ u_{y,i}(\tilde{z}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_i & W_i \\ -V_i & V_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\lambda \tilde{z}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{\lambda \tilde{z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_i^+ \\ c_i^- \end{bmatrix} \quad (2.3.1)$$

第一个边界条件为:

$$\psi_1 = \psi_i(0)$$

带入式2.2.7得出第一个边界方程组:

$$\begin{bmatrix} W_1 & W_1 \\ -V_1 & V_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^+ \\ c_1^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_i & W_i \\ -V_i & V_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_i^+ \\ c_i^- \end{bmatrix} \quad (2.3.2)$$

第二个边界条件为:

$$\psi(k_0 d_i) = \psi_2$$

带入矩阵得出第二个边界方程组:

$$\begin{bmatrix} W_2 & W_2 \\ -V_2 & V_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2^+ \\ c_2^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_i & W_i \\ -V_i & V_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\lambda k_0 d_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{\lambda k_0 d_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_i^+ \\ c_i^- \end{bmatrix} \quad (2.3.3)$$

通过求解两个矩阵方程组得出系数 c 的值。

2.4 TE 偏振与TM 偏振

当入射光 k 的磁场分量垂直入射平面时,即图1中 $\psi=0^\circ$,假设图1中入射平面同坐标系 xoz 平面平行($\Phi=0^\circ$),那 $H \perp xoz$ 。其在 x 和 z 矢量方向磁场分量为0,也不存在 y 矢量方向电场分量,仅存在 y 方向的磁场分量以及 x 和 z 方向的电场。在TM偏振情况下,式2.1.5和2.1.6中的六个麦克斯韦分量表达式可简化为以下三个公式,对应傅里叶展开式也相应化简。通过本篇2.3和2.4章节计算步骤可推导出TM偏振严格耦合矩阵方程组。

$$\begin{cases} jk_{x(m,n)} S_z(m,n,z) + S_x(m,n,z) \frac{d}{dz} = k_0 \sum_{q,r} b_{m-q,n-r} U_y(q,r,z) \\ -U_y(m,n,z) \frac{d}{dz} = k_0 \sum_{q,r} a_{m-q,n-r} S_x(q,r,z) \\ jk_{y(m,n)} U_x(m,n,z) = k_0 \sum_{q,r} a_{m-q,n-r} S_z(q,r,z) \end{cases}$$

(2.4.1) 更直观的物理结构参数，极大提高了光栅优化方案以及光栅创新设计的可能。

与TM偏振相反，TE偏振指入射光 k 电场分量垂直入射平面时，即 $\psi=90^\circ$ 时，其电场仅在 y 方向存在分量，而磁场分量存在于 x 和 z 矢量方向，麦克斯韦方程式可简化为如下三种分量方程。

$$\left\{ \begin{array}{l} -S_y(m, n, z) \frac{d}{dz} = k_0 \sum_{q,r} b_{m-q, n-r} U_x(q, r, z) \\ jk_{y(m,n)} S_x(m, n, z) = k_0 \sum_{q,r} b_{m-q, n-r} U_z(q, r, z) \\ jk_{x(m,n)} U_z(m, n, z) + U_x(m, n, z) \frac{d}{dz} = k_0 \sum_{q,r} a_{m-q, n-r} S_y(q, r, z) \end{array} \right. \quad (2.4.2)$$

3 结语

由于对极小型和超薄型二元光学元件需求飞速增长，传统衍射光学算法逐渐被矢量衍射光学应用所代替，而严格耦合波分析法作为衍射算法代表，能为所有光栅设计提供精准算法求解。基于此，周常河教授建立了矢量达曼光栅简化模式理论^[4]，通过模型将理论数值转换为

参考文献：

- [1]J. Jahns, M. M. Downs, M. E. Prise, N. Strelbl and S. J. Walker, "Dammann Gratings For Laser Beam Shaping," *Optical Engineering*, vol. 28, no. 12, pp. 1267-1275, Dec. 1989.
- [2]H. Dammann and K. Görtler, "High-efficiency in-line multiple imaging by means of multiple phase holograms," *Optics Communications*, vol. 3, Issue 5, pp. 312-315, 1971, doi: 10.1016/0030-4018(71)90095-2.
- [3]R. C. Raymond, "Computational Electromagnetics, Topic 7, Rigorous Coupled-Wave Analysis," RAYMOND RUMPF EMLab, <https://raymondrumpf.com/research/> (Accessed Dec 31, 2021)
- [4]周常河，达曼光栅原理及应用[M].北京：科学出版社，2017：9，155，185，77-107.