

# 高等数学课程之两向量的向量积 I

## ——课堂教学创新成果报告

王德莉<sup>1\*</sup> 张 梦<sup>1</sup> 李晨莹<sup>1</sup> 权豫西<sup>1</sup> 李 阳<sup>1</sup> 裴海清<sup>2\*</sup>

1. 西安建筑科技大学 理学院 陕西西安 710055

2. 西北工业大学 力学与土木建筑学院 陕西西安 710129

**摘 要:** 由一组大学生开展的创新项目“振荡浮子式海洋波能装置的功率计算分析及参数设计”研究所遇到的建模问题引出‘波俘能摆扭转矩’这一关键科学问题,进一步回溯到物理学中‘力矩’概念,从而引出本节内容‘向量积’。动态几何式绘制又乘以诠释向量积的数与形,进一步作图式证明其分配律,课堂互动示范又乘的方向与讨论若干可能情形,同步发布学习通课堂小测以巩固与加强学生数形结合思维。课程网络平台练习及课后作业收到学生高度参与及反馈的结果,表明通过本节课学生更自主地将其前后关联知识章节中矢量的概念、射影大小及旋转、平行四边形法则、矢量空间动静态表征与平移不变性等知识融合一体并加以运用。因而本节课探索的教学模式为本课程或其它关联课程的课堂教学创新实践提供了新视角。

**关键词:** 向量积; 数形结合; 动态几何式证明

### 一、以大学生创新项目问题导入课程内容

中共中央、国务院在《关于深化教育改革,全面推进素质教育的决定》中明确指出:“高等教育改革要加快课程改革和教育改革,继续调整专业结构和设置,使学生尽早地参与科技研究开发和创新活动,鼓励跨学科选修课程,培养基础扎实、知识面宽、具有创新能力的高素质专门人才。”高等学校是培养创新人才的基地,必须全方位深化教育教学改革,把培养学生的创新能力作为教育改革的核心工作。《高等数学》课程中空间解析几何部分,以代数的方法研究几何问题,是连接中学数学与高等数学的桥梁,起到承上启下的作用;也是学习其他后继课程的基础,通过这部分课程的教学,使学生系统地认识并深刻地理解几何学的概念、理论与方法,为后继课程开展打下坚实的基础。课程目标是培养基础扎实、具有创新思维和创新能力的创新型人才。创新能力的培养,必须建立在以学生为主体、教师为主导的基础上,必须在学生主动参与、积极投入的情况下才能够实现[1-4]。

本节课以我们一组大学生开展的创新项目“振荡浮子式海洋波能装置的功率计算分析及参数设计”研究所遇到的建模问题引出波俘能摆扭转矩这一关键科学问题(图1),进一步回溯到物理学中‘力矩’概念,从而引出本节内容‘向量积’。通过大创课题的引入,使得同学们也关注到‘波浪

能是海洋能中最主要的能源之一,它的开发和利用对缓解能源危机和减少环境污染具有十分重要的战略意义’这一发展实践问题。进一步引导同学们分析:波浪能装置的能量转化问题,是三航事业之海洋波俘能装置开发问题的关键,而准确计算波俘能摆扭转矩是其中的关键科学问题,进而基础地关联到同学们已接触过的物理学中力矩问题,类似于上节课‘数量积’对应了‘做功’问题的数学表征,这里以‘力矩’问题引出数学概念‘向量积’。因而整个课堂内容引入积极回应了教学理论内容不易落地及易远离实践应用的痛点问题。

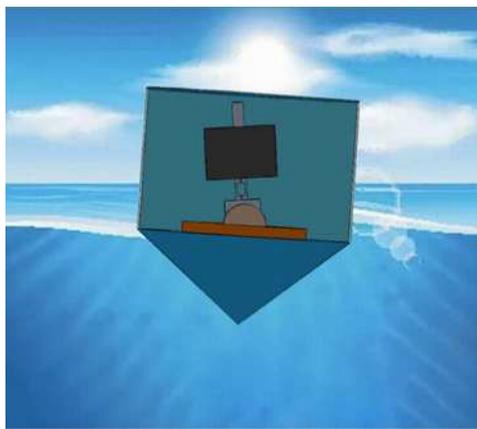


图1 振荡浮子式波能装置示意图

## 二、几何作图式诠释向量积的数与形及证明其分配律

课程已经完成了向量及其线性运算章节内容，有了向量、投影、夹角、数量积等概念及运算规律，并同步有线性代数课程教学，因此充分具备了本节开展向量积运算律—分配律证明的关联知识支撑。另外向量积矢量特性使得以代数方式论证其分配律的做法（请学生课前思考）并不好开展，因此需要转换思维寻求有效的方法来解决，这些问题会驱使着学生期待揭开本节课程。区别于数量积的‘标量’特性，向量积由矢量构制，大小和方向分别由条件向量长度、方向以及夹角决定。由常规公式推演法说明向量积定义不够直观、不够清楚。在教学实施过程中，如何能根据实物模型、动态图形的直观效果给学生以几何美的感受，化抽象为形象，激发学生的学习热情，提高教学质量；怎样在教学过程中提出合理的教学案例，使师生充分交流，既能锻炼学生的动手操作能力，提高学生的科研能力，又能提高学生的主动性，锻炼学生的自主学习能力。这些都是高等数学中空间解析几何部分教学需要解决的问题 [5]。因而本节课聚焦于探索以几何式展示（作图法）构制向量积，通过数形结合，连接动静展示以形助数，通过形的角度深刻理解数的内涵，帮助学习者更好地理解与掌握向量积及其运算律。

对教材中略去证明的向量积分配律进行详细证明与分析，教材中给出了右分配律与左分配律，本节课以右分配律为例说明。引导学生思考特殊情形即出现零向量或共线情形，此时从代数的角度可说明分配律的成立。再到一般情形，代数的方式证明就不够直观，学生不易实现。引导学生们探索能否以几何作图展示进而实现分配律证明，切入‘数形结合、以形助数、简化目标、执果索图’等课程思政元素，运用多媒体、作图软件及 PPT 动静态演示等新技术、新手段，结合教师示范及引导学生参与互动，巧制射影并旋转之进而制作出分配律的其中一项叉乘。右分配律涉及到三块向量积，通过其中一块的构制经验，并结合本节课的前后关联知识章节中向量的概念、单位向量、射影、向量旋转、向量三角形法则及向量平移不变性等条件，依次构制出右分配律的三块叉乘，由此一方面诠释了向量积的数与形，另一方面实现了右分配律（图 2）。

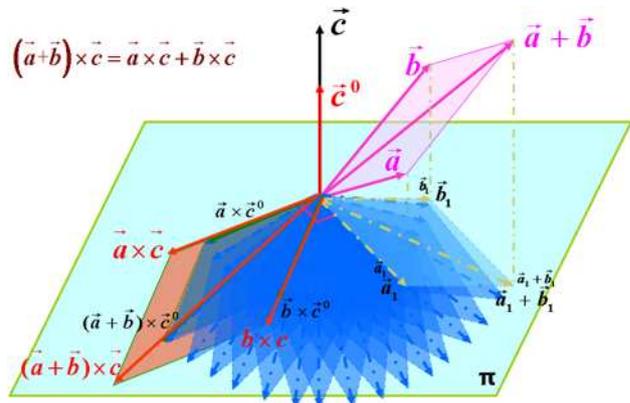


图 2 作图法证明向量积右分配律

## 三、“互动式”课堂与“思维导图”牵引学习兴趣

根据课程内容特点进行启发式、探讨式、阐述式及互动式等教学模式。所谓互动式教学模式就是以“学生为主体，教师为主导”的教学原则，以启发式教学为主，让学生与教师共同参加课程的教与学。通过学生对教材的自主钻研与小组讨论相结合，按互教和互学的模式进行讨论和交流心得等方式学习，培养大学生的自学能力和创造性思维 [6]。本节课之初引出的大创问题，来自于授课教师指导学生进行的科研创新训练课题，通过引导学生以执行大创项目中遇到的实际问题关联课程理论知识，进而为课程理论的应用实践进行切实场景示范，从而激发学生的学习积极性。在教学中，学生常常会基本概念和基本定理没记住，对基本概念和定理的理解也不透彻。针对这样的痛点问题，教师在讲授基本概念和定理时，要留给学生记忆与思考的时间，真正地把概念及定理讲清楚，让学生充分地理解。比如向量积概念的矢量特性，通过将‘大小’与平行四边形面积对应，进而引出向量积的几何意义；由教师示范并与学生互动‘右手螺旋法则’以帮助学生深刻体会叉乘方向以及明确力矩方向。同步发布‘寻找向量积及其方向’的学习通随堂练习以巩固与加强学生对向量积概念的理解。因此，我们在高等数学课程里解析几何部分的教学需要加强基本概念与定理的讲授，引导学生充分理解，进而启发学生的思维，提升其创新能力，进一步优化教师的教学效果。

课堂小结与思考环节复盘了本节课的涉及内容，并回应了向量积的应用场景（数学几何、物理力矩、波浪能装置动力学建模、可运动机器人设计与操控等），让学生体会到数学的各种知识与工程实践等问题的解决密切相关，只要善于发现与运用，必然能了解实践中的数学之美。最后以一张

思维导图(图3)关联本节课前后的相关内容(向量概念、模、向量运算、基本定理、坐标表示、数量积及共线与垂直的充要条件等),给学生留下课余作业:将本节所学向量积内容补充到思维导图里,一方面帮助学生更系统地学习与掌握向量相关内容,另一方面也对下节课的内容进行了预告,牵引学生的学习兴趣。



图3 思维导图式课堂总结与预告

#### 四、结语

高等数学中解析几何部分是数学专业的重要内容,在教学实施中,不仅要重视传授知识,也要注重培养学生空间想象能力、动手操作能力、理论联系实践能力,注重培养学生的探索精神和创新意识,实现知识、能力、素质的协调发展。本节课聚焦于向量的空间几何特性,探索以几何法/作图法构制向量积,通过数形结合,连接动静态展示以形助数,借助一些画图软件与技术将空间图形以动态的、直观的形式展示给学生,进而加强直观性教学,增强学生的空间想象力。

注重加强课堂教学中的实验教学,提高学生们的动手操作能力和科研创新能力。结合本节课初一组学生大创课题‘振荡浮子式海洋波能装置的功率计算分析及参数设计’

问题引例,实施课堂互动环节:示范叉乘的方向与讨论若干可能情形;同步发布学习通随堂小测‘请展示引例涉及的扭转矩’以引导学生操作一些数学软件及画图工具进行实战操作。由此增添了课堂教学的趣味性以及挑战性,在培养学生分析问题与探索问题能力的同时,也启发同学们会用善用软件与技术为学习服务。课程网络平台练习、小测及课后作业收到学生高度参与及反馈的结果,表明通过本节课学生更自主地将其前后关联知识章节的内容融合一体并加以运用。因而本节课探索的教学模式为本课程或其它关联课程的课堂教学创新实践提供了新途径。

#### 参考文献

- [1] 曾眺英. 高校解析几何教学改革创新的探索. 科技风, 2021, 473(33): 89-91.
- [2] 史雪荣. 空间解析几何教学中培养学生的创新能力. 林区教学, 2015, 220(07): 71-72.
- [3] 同济大学数学系. 高等数学. 高等教育出版社, 2014, 第7版.
- [4] 吕林根, 许子道. 解析几何. 高等教育出版社, 2019, 第5版.
- [5] 徐传友, 黄映雪, 刘敏. 创新人才培养模式下空间解析几何的教学策略. 黑河学院学报, 2019, 10(12): 131-134.
- [6] 苗宝军, 梁庆利. “解析几何”课程中的教学技巧分析与科研创新能力的培养. 吉林省教育学院学报, 2010, 26(03): 153-154.

#### 通讯作者简介:

王德莉, 博士, 副教授; 裴海清, 博士, 副教授; 通讯邮箱: dlwang@xauat.edu.cn; hqpei@nwpu.edu.cn;

基金项目: 陕西数理基础科学研究项目(22JSQ029); 西安建筑科技大学研究启动基金(Re1912); 国家级大学生创新创业训练计划项目(202210703003); 中央高校基本研究业务费启动基金(G2023KY05102)