

小专题大效益深度探索高三数学复习的新路径

周心华

上海市育才中学 上海市嘉定区 201801

摘要:当前高三数学复习中一般都采用三轮复习法,即“章节——专题——模拟”,其中专题复习是高三第二轮复习的常用模式。专题复习是在系统复习的基础上,打破单元分割的界限,将知识系统化、结构化,意在帮助学生整体掌握高中阶段的数学知识和思想方法,但如果专题设置得太大、太多,容易造成复习时间不够,相反,专题设计合理并且利用好,对减轻学生负担、提高复习效率、突破知识难点、升华思维模式是有着不可言喻的作用。鉴于以往的实施效果,笔者认为在数学第二轮复习时,可尝试采用“小专题”的复习方法。

关键词:高中数学;课堂教学;小专题

1. 什么是小专题

小专题可以狭义理解为针对某些特定的目标,结合学情设计的,能够在较短时间内专门解决的“问题集”^[1]。它具备了“小”“专”“活”的显著特点,即针对性强、内容精细、形式多样。小专题指向性强,思维核心明确,往往通过设定“小切口”,逐步深入,实现知识点的再次突破和思想方法的综合提升。

小专题复习法避免了传统专题复习中因内容过于宽泛而导致的复习压力,使学生能够更加聚焦于难点和易错点。通过精细化设计和针对性教学,小专题复习法能够帮助学生快速掌握核心知识,提升解题能力。小专题复习法能够针对学生的薄弱环节进行强化训练,从而有效突破知识难点。小专题复习法不仅注重知识的传授,更重视思维方法的引导和提升,有助于学生形成更加灵活、高效的思维模式^[2]。

2. 小专题复习法的理论基础

2.1 建构主义学习理论

建构主义认为,学习是一个主动建构知识的过程^[3]。小专题复习法鼓励学生通过问题解决与探究活动,主动建构知识体系,实现知识的内化与迁移。

2.2 最近发展区理论

维果斯基的最近发展区理论指出,教学应着眼于学生的潜在发展水平,为学生提供带有难度的内容。小专题的例题选择恰好在学生的“最近发展区”内,既具有挑战性,又不至于让学生望而生畏^[4]。

2.3 认知负荷理论

认知负荷理论认为,人的工作记忆容量有限,过多的信息会增加认知负荷,影响学习效果^[5]。小专题通过精简内容,突出重点,有效降低了学生的认知负荷,提高了学习效率。

3. 具体做法

3.1 合理设立小专题

在第二轮复习准备阶段,老师们需探讨哪些部分应该设立小专题,一般可从两个方面的信息反馈进行分析确定。

(1) 根据学生需求。

对学生设立问卷调查,设置的问题可围绕询问学生对高中各知识点感觉比较困难的问题。通过数据统计,分析多数学生未掌握好的知识点。

(2) 根据以往考试的数据分析和阅卷情况分析进行筛选。

建议主要抓住的是出错率较高的题目和易于变式的问题。

(3) 分析历年高考试卷,整理热门考点。

例如:在《解析几何》的二轮复习中,根据学生的薄弱环节,可设定如下几个小专题:

专题一:求曲线轨迹方程的方法;

专题二:圆锥曲线中的定点、定直线问题;

专题三:圆锥曲线中的最值问题;

专题四:圆锥曲线中的探索型问题。

一般在第二轮复习前完成各小专题的设定,但在推进

的过程中仍需要根据教学情况不断予以补充、完善。

3.2 精心设计小专题

(1) 设定教学目标, 体现“小”

设定和明确小专题复习课的教学目标非常重要, 它直接制约教学内容选择^[6]。一般设定教学目标, 简单来说就是要明确这节课究竟要让学生掌握什么, 也可以理解为进一步加强哪个知识点的学习, 需用典型例题与练习逐步深入地完善此知识点, 设定过程中, 要体现“小”。

例如: 进行数列二轮复习时, 等差等比数列作为重点应予以复习, 设定小专题时, 如果把教学目标笼统地定为“等差等比数列复习”, 这样的目标不够明确, 等差等比数列的知识点众多, 不应该面面俱到, 可以设定为“通项和前 n 项和的应用”, 也可以设定“等差等比性质综合应用”等, 真正体现“小”。

在进行每个小专题复习中, 设定的教学目标也要体现小。

再如: 在进行小专题《数列的“新定义”问题》复习中, 设定的教学目标为

(1) 能够通过仔细审题, 明确“新定义”, 找到数列的特征与规律;

(2) 通过复习探究, 体会“类比”及“转化”的思想方法, 化生为熟, 化新为旧凸显“新定义”。

(2) 精设教学内容, 体现“专”

小专题的例题应该具有基础性、针对性、典型性和研究性, 例题的选择是否恰当对本节小专题教学是否成功至关重要^[7]。例题的选择不能过于追求难度, 内容应在学生会的“最近发展区”内进行选择, 围绕教学目标选择例题, 而且例题的选择要精, 要有可变、可拓展, 课延伸的研究性, 要体现“专”。

例如: 在“直线与圆的交点问题”小专题教学中, 选取了如下部分例题。

例 1: ①已知直线 $l: x - y + m = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$, 求实数 m 的取值范围, 使得直线和圆分别有两个、一个、0 个交点。

②已知直线 $l: x - y + m = 0$ 与曲线 $C: y = \sqrt{1 - x^2}$ 有两个公共点, 求实数 m 的取值范围。

③已知直线 $l: mx - y + 2m = 0$ 与曲线 $C: y = \sqrt{1 - x^2}$ 有两个公共点, 求实数 m 的取值范围。

④关于 x 的方程 $x + m = \sqrt{1 - x^2}$ 有两个相异的实根, 求实数 m 的取值范围。

再如: 在“数列的“新定义”问题”小专题教学中, 根据了不同环节教学需要, 设定少而专的例题。

环节一: 仔细审题、明确定义

例 1.1: (1) 请依据定义写出等和数列 $\{a_n\}$ 的递推公式 $a_{n+1} + a_n = k(n \in N^*)$

(2) ①若设等和数列 $\{a_n\}$ 是首项为 2, 公和为 5 的等和数列; 则 $a_{18} =$ _____, $S_{20} =$ _____;

②请写出 $\{a_n\}$ 通项公式与前 n 项和 S_n 公式;

(3) 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = k(n \geq N^*)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的周期为?

若数列 $\{a_n\}$ 满足

$a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+p-1} = k(p \geq 2, p, n \in N^*)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的周期为?

环节二: 类比迁移, 化新为旧

在一个数列中, 如果每一项与它的后一项的积都为同一个非零常数 h , 则称其为“等积数列”这个常数 h 叫做公积。

例 1.2: 请探究等积数列 $\{b_n\}$ 的性质

(1) 等积数列 $\{b_n\}$ 的递推公式: $b_{n+1} \cdot b_n = h(h \neq 0, n \in N^*)$

(2) 周期为 2 的周期数列

(3) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n \cdot b_{n+1} \cdot b_{n+2} = h(n \geq N^*)$, 则周期为 3;

若数列 $\{b_n\}$ 满足

$b_n \cdot b_{n+1} \cdot \dots \cdot b_{n+p-1} = h(p \geq 2, p, n \in N^*)$, 则周期为 p 。

环节三: 深层理解、化生为熟

例 2.1: 若存在实数 $M > 0$, 使得对任意的 $n \in N^*$, 都有 $|a_n| < M$, 则数列 $\{a_n\}$ “有界”, 数列 $\{a_n\}$ 为“有界数列”, 判断以下命题, 正确的是 ()

A 若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且首项 $a_1 = 0$, 则数列 $\{a_n\}$ 为“有界数列”;

B 若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且公差 $d = 0$, 则数列 $\{a_n\}$ 为“有界数列”;

C 若数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 且公比 $|q| > 1$, 则数列 $\{a_n\}$ 为“有界数列”;

D 若数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 也是“有界数列”, 则公比 $0 < q < 1$.

转化问题: (1) 对于等差数列 $\{a_n\}$, 若存在实数 $M > 0$, 使得对任意的 $n \in N^*$, 都有 $|a_n| < M$, 则公差 d 的取值范围是 _____

(2) 对于等比数列 $\{a_n\}$, 若存在实数 $M > 0$, 使得对任意的 $n \in N^*$, 都有 $|a_n| < M$, 则公比 q 的取值范围是 _____

例 2.2: 设数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n , 若存在实数 $M > 0$, 使得对任意的 $n \in N^*$, 都有 $|S_n| < M$, 则称数列 $\{a_n\}$ 为“有界和数列”, 判断以下命题, 正确的是 ()

A 若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且首项 $a_1 = 0$, 则数列 $\{a_n\}$ 为“有界和数列”;

B 若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且公差 $d = 0$, 则数列 $\{a_n\}$ 为“有界和数列”;

C 若数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 且公比 $0 < q < 1$, 则数列 $\{a_n\}$ 为“有界和数列”;

D 若数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 也是“有界和数列”, 则公比 $0 < q < 1$.

转化问题: (1) 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若存在实数 $M > 0$, 使得对任意的 $n \in N^*$, 都有 $|S_n| < M$, 则首项 a_1 与公差 d 需要满足的条件是?

(2) 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若存在实数 $M > 0$, 使得对任意的 $n \in N^*$, 都有 $|S_n| < M$, 则公比 q 的取值范围是 _____

(3) 优化教学过程, 体现“新”

小专题的设计绝大多数针对典型的重难点问题、易错问题, 对高三学生来讲都不是新知识的传授, 所以, 在教学过程中, 要注重教学模式, 要引导学生经历数学化活动, 在此过程中习得数学的思维方式。虽然高三复习时间非常宝贵, 但在课堂上要舍得给学生时间, 注重优化教学过程, 体现“新”。

例如: 在小专题“圆锥曲线与直线关系”的教学过程中的引例:

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, 直线 $l: y = kx + b$, 请

具体给出 k, b 一组值, 使直线和椭圆相交。

这种开放式的引例小巧而灵活, 有助于学生主动参与探究, 激发学生的学习积极性。

3.3 注重小专题的后续反馈

每个小专题课堂教学完成后, 都需编制相应的反馈练习。课后的训练是课堂教学的延伸和补充, 不仅在技能的形成阶段需要, 而且在技能形成之后仍需及时训练, 才能使技能方法熟练掌握、保持并得到发展。小专题课后训练题的设置可以从内容上进行变式, 通过变化条件、变化结论或条件和结论互换等, 促进学生对该小专题方法技能的掌握。

例如: 在“数列的“新定义”问题”小专题教学中, 根据教学目标和教学内容, 设置了少而精的课后反馈练习。

练习 1、在数列 $\{b_n\}$ 中, $b_1, b_2 \in N^*$, $b_n = |b_{n-1} - b_{n-2}|$, ($n \geq 3, n \in N^*$), 则称其为“绝对差数列”。若“绝对差数列” $\{b_n\}$ 中, $b_{20} = 3, b_{21} = 0$, 数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = b_n + b_{n+1} + b_{n+2}$ ($n \in N^*$), 分别判断 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ 是否存在, 如果存在, 求出极限值。

结合周期性 $\{b_n\}$ 极限不存在;
 $c_n = b_n + b_{n+1} + b_{n+2} = 6$ ($n \geq 20, n \in N^*$),
 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 6$

练习 2、若 $\{c_n\}$ 是递增数列, 数列 $\{a_n\}$ 满足: 对任意 $n \in N^*$, 存在 $m \in N^*$, 使得 $\frac{a_m - c_n}{a_m - c_{n+1}} \leq 0$, 则称

$\{a_n\}$ 是 $\{c_n\}$ 的“分隔数列”。

1) 设 $c_n = 2n, a_n = n + 1$, 证明: 数列 $\{a_n\}$ 是 $\{c_n\}$ 的分隔数列;

2) 设 $c_n = n - 4, S_n$ 是 $\{c_n\}$ 的前 n 项和, $d_n = c_{3n-2}$, 判断数列 $\{S_n\}$ 是否是数列 $\{d_n\}$ 的分隔数列, 并说明理由;

练习 3、设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 对任意 $n \in N^*$, 存在 $m \in N^*$, 使得 $S_n = a_m$, 则称 $\{a_n\}$ 是“H 数列”.

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = 2^n$, 证明: $\{a_n\}$ 是“H 数列”;

(2) 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_1 = 1, d < 0$, 若 $\{a_n\}$ 是“H 数列”, 求 d .

(3) 证明: 对任意的等差数列 $\{a_n\}$, 总存在两个“H 数列” $\{b_n\}$ 与 $\{c_n\}$, 使得 $a_n = b_n + c_n$ 成立.

4. 小专题复习法的实践案例与效果分析

4.1 实践案例

案例一: 数列的“新定义”问题

在数列二轮复习中, 该班级设立了“数列的‘新定义’问题”小专题. 通过引入“绝对差数列”“分隔数列”等新定义问题, 引导学生们进行深入思考和探究. 在课堂上, 教师们采用了问题式教学和小组讨论等方式, 鼓励学生们积极参与课堂互动. 课后, 学生们通过完成反馈练习和变式训练等方式, 进一步巩固和深化了对数列新定义问题的理解和掌握.

案例二: 圆锥曲线中的定点、定直线问题

在解析几何二轮复习中, 该班级设立了“圆锥曲线中的定点、定直线问题”小专题. 通过引入典型的例题和练习题, 引导学生们掌握解决这类问题的基本方法和技巧. 在课堂上, 教师们注重引导学生们进行思维拓展和解题策略的总结归纳. 课后, 学生们通过完成相关练习和反思总结等方式, 进一步提升了解决这类问题的能力^[8].

4.2 效果分析

案例一: 数列的“新定义”问题效果分析

在该小专题的复习过程中, 学生们首先通过教师的引导, 理解了“绝对差数列”、“分隔数列”等新定义的本质特征. 在课堂上, 通过小组讨论和问题解决, 学生们逐渐掌握了解决这类问题的基本思路和方法. 例如, 在探究“绝对差数列”的通项公式时, 学生们学会了通过递推关系式进行求解; 在判断数列是否为“分隔数列”时, 学生们学

会了通过比较数列项的大小关系进行判断. 课后, 学生们通过完成反馈练习和变式训练, 进一步巩固了所学知识. 他们发现, 虽然题目形式千变万化, 但只要掌握了新定义的本质特征和解题的基本思路, 就能够灵活应对各种题型.

案例二: 圆锥曲线中的定点、定直线问题效果分析

在“圆锥曲线中的定点、定直线问题”小专题的复习中, 学生们首先通过典型的例题, 了解了这类问题的基本形式和求解方法. 教师在课堂上注重引导学生们进行思维拓展, 鼓励他们尝试不同的解题策略和方法. 例如, 在求解圆锥曲线中的定点问题时, 学生们学会了通过联立方程、消元化简等步骤进行求解; 在求解定直线问题时, 学生们学会了利用圆锥曲线的性质进行推导和判断. 课后, 学生们通过完成相关练习和反思总结, 进一步提升了解决这类问题的能力. 他们发现, 圆锥曲线中的定点、定直线问题虽然看似复杂, 但只要掌握了基本的求解方法和思路, 就能够迅速找到解题的突破口.

参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准 (2020 年修订版) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [2] 王尚志, 吕世虎. 核心素养导向的高中数学教学设计与实践 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2021.
- [3] 吴正宪, 张丹. 高考数学专题复习策略: 从知识整合到思维突破 [J]. 数学教育学报, 2022, 31(3): 12-18.
- [4] 教育部考试中心. 中国高考评价体系与命题改革 (2021 年版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2021.
- [5] Sweller, J., Ayres, P., & Kalyuga, S. 认知负荷理论的新进展与教学应用 [J]. 教育心理学前沿, 2020, 8(4): 56-67.
- [6] 李旭, 陈晓明. 基于建构主义的数学微专题教学模式研究 [J]. 数学教学研究, 2023, 42(1): 28-34.
- [7] 刘红霞, 周志华. 高中数学复习中的“小专题”设计与实践效果分析 [J]. 基础教育课程, 2021(6): 45-52.
- [8] 张景中, 彭翥成. 高考数学压轴题解题策略与专题精讲 [M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2022.

作者简介: 周心华 (1976.10), 女, 民族: 汉, 籍贯: 江西省, 学历: 硕士, 职称: 高级教师, 研究方向: 中学数学教育