

重构微分教学次序，培养学生思维能力

汤子豪

湖北黄冈应急管理职业技术学院 公共课部 湖北黄冈 438021

摘要:微分概念的教学采用更贴近生活的趣味性实例导入，同时渗透积分无限分割、以直代曲的思想。再以图形为切入点，用数形结合的方式，从导数的几何意义过渡到微分的几何意义，激发了学生的学习兴趣，培养了学生的思维能力。

关键词:增量；分割；无限；近似；以直代曲

引言

以同济大学《高等数学》为例，微分的概念这一节教学内容依次按照三个模块展开：微分的定义导数与微分的关系微分的几何意义。第一个模块借助实例揭露微分定义的本质：函数的增量可以表示成两部分，一部分为自变量增量的线性部分，另一部分是当自变量增量趋于零时，比线性部分高阶的无穷小，所以函数的增量可以由线性部分来近似代替，称为线性主部。给出微分具体的定义之后，后续两个模块的内容便在此基础上展开。

1 教学策略破局

在实际授课中，按照这个次序和逻辑展开教学，学生会有以下疑问：

(1) 我能够理解函数增量的两个部分之间的数量关系，但是为什么要用线性主部去近似代替？

“这样做很合理，但是为什么要这样做”，这个问题不容忽视。学生学习时思考这个问题，一来有助于学生深入的理解知识的本质，建立完整的知识体系；二来思考“为什么要这么做”，是在分析事物之间的因果关系，在锻炼逻辑思维的同时，培养了批判性思维。

(2) 我能根据微分的定义记住符号，但这些符号很抽象，应该怎样纳入知识体系？

在知识方面，虽然微分符号抽象，但在高等数学中有着精确的含义和重要的作用，随着对微积分知识的深入学习和应用，这些符号有其重要的便利性和实用性。在素养方面，帮助学生在符号与现实之间建立联系，是实现从“机械解题”到“深度理解”的跨越，是培养学生数学抽象、直观想象等数学核心素养的关键。

解决这些问题，需要对教学内容作以下调整：

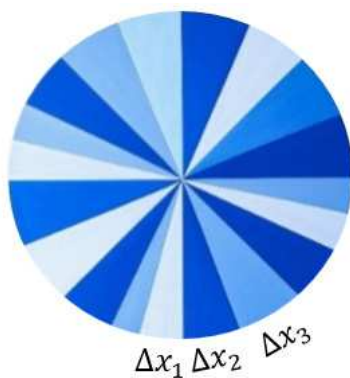
① 新课趣味性导入，选取更贴近生活的实例；

② 重构章节教学次序，后续篇章《定积分》中“无限分割，以直代曲”的思想提前渗透，加入到新课导入；

③ 重构本节教学次序，按照微分的几何意义导数与微分的关系微分的定义，倒叙式教学。首先从图形出发，介绍微分的几何意义，再结合几何意义介绍导数与微分的关系，最后给出微分的定义并加以证明。

2 趣味性导入

(1) 生活实例：地球表面是曲面，但是我们在地面上行走，感觉不到弧度，觉得地面是平的。因为地球表面积很大，我们行走的这片土地，相较于整个地球表面，显得很微小。相当于把地表分成无限多份，取其中一份，每一份几乎为一个点，点自然没有平面与曲面的区别，这便是“无限分割，以直代曲”。



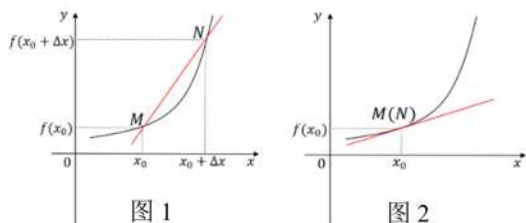
(2) 圆的周长推导面积：半径为 r 的圆分割成无限个扇形，扇形的面积之和即圆的面积。这里的扇形可以近似为三角形，三角形的底依次记为 $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ ，它们的和是圆的周长 $2\pi r$ ，三角形的高为圆的半径 r ，以此推导圆的面积 $S_{\text{圆}}$ ：

$$\begin{aligned} S_{\text{圆}} &= S_1 + S_2 + \dots + S_n \\ &= \frac{1}{2} \Delta x_1 \cdot r + \frac{1}{2} \Delta x_2 \cdot r + \dots + \frac{1}{2} \Delta x_n \cdot r \\ &= \frac{1}{2} r \cdot (\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) \\ &= \frac{1}{2} r \cdot 2\pi r = \pi r^2 \end{aligned}$$

以上面积公式推导是建立在近似的基础上,把扇形近似为三角形,但是 $S_{\text{圆}} = \pi r^2$ 是准确的圆的面积公式.这是因为圆分割成了无限个扇形,每个扇形所对的弧长都短到几乎为一个点,点自然没有直线与曲线的区别,所以把扇形当作三角形来计算可以得到准确的结论,这便是“无限分割,以直代曲”.

3 从导数的几何意义到微分的几何意义

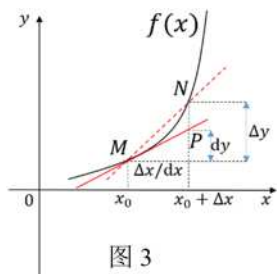
如图 1, 曲线是函数 $f(x)$ 的图像, $M(x_0, f(x_0))$ 和 $N(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ 为曲线上的两点, 直线 MN 是曲线的割线. 加上极限 $\Delta x \rightarrow 0$, 即当 M 、 N 两点无限接近时, 此时直线 MN 是曲线的切线, 如图 2.



如图 3, 曲线是函数 $f(x)$ 的图像, 把曲线分割成无限小段, 其中一小段为 MN . 根据“无限分割, 以直代曲”, 曲线 MN 长度短到几乎为一个点, 可以近似看作直线. 但数学是严谨的, 无限接近直线也终究不是直线, 如果坚持以直代曲, 后续的研究应分为两步:

①作一条贴近曲线 MN 的直线来代替它, 人为的“以直代曲”;

②证明直线和曲线之间的差距可以忽略不计.



首先解决①, 贴近曲线的直线, 最容易想到的便是连接 M 、 N 两点形成的直线. 连接 M 、 N 形成的是割线 MN , 它是“薛定谔的直线”, 不存在的直线.

因为曲线 MN 是曲线分割成的无限小段中的一段, 表示 M 、 N 两点是无限接近的, 根据导数的几何意义, 当 M 、 N 两点无限接近时, 割线 MN 成为了切线. 所以, 贴近曲线 MN 的直线是切线 MP , 以直代曲是以“切线 MP ”代“曲线 MN ”.

如图 3, 以直代曲之后, 对比“切线 MP ”和“曲线 MN ”: 曲线 MN : 自变量的增量记 Δx , 函数的增量 Δy ; 切线 MP : 自变量的增量记 dx , dx 称为自变量的微分; 函数的增量记 dy , dy 称为函数的微分.

这里通过图形揭示符号 dy , dx 背后的逻辑, 避免机械记忆, 在教学过程中, 减轻学生的认知负荷, 促进深度学习, 引出微分的几何意义以及微分与导数的关系.

M 、 N 两点无限接近, 切线 MP 和曲线 MN 无限重合, dy 和 Δy 几乎相等, 也就是说, dy 和 Δy 相差的部分可以忽略不计, 即 $dx = \Delta x$, $dy \approx \Delta y$. 根据导数的几何意义和斜率的计算方式, $\frac{dy}{dx} = f'(x_0)$, 即函数在点 x_0 处函数的微分与自变量的微分之商等于函数在点 x_0 处的导数. 综上, Δx , Δy , dx , dy 四个量之间的关系为:

$$\Delta y \approx dy = f'(x_0) \cdot dx = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

以上微分的几何意义、微分与导数的关系, 这些知识点的介绍都是建立在②成立的前提下, 即“切线 MP ”和“曲线 MN ”的差距可以忽略不计. 以上只是结合图形简单的说明了 $\Delta y \approx dy$, 即差距可以忽略不计, 但这还需要严格的证明, 这正是后续的学习内容——微分的定义. 本节倒叙式教学模式微分的几何意义导数与微分的关系微分的定义, 进入最后一个环节.

4 总结

按照调整之后的教学内容, 顺利完成教学的同时达成以下目标:

- (1) 趣味性实例顺利导入了微分的概念, 同时渗透了“无限分割, 以直代曲”的思想;
- (2) “无限分割, 以直代曲”的思想既解答了学生关于微分定义中用线性主部去近似代替函数增量的疑问, 又为后续篇章积分的学习作铺垫;
- (3) 借助微分的几何意义帮助学生建立具象化认知, 理解并记忆微分定义中较为抽象的符号;
- (4) 倒叙式教学模式保护了学生的学习兴趣, 增强了学

生的参与感.

参考文献:

[1] 华东师范大学数学科学学院编. 数学分析 [M]. 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2019:89-123.

[2] 同济大学数学系. 高等数学 [M]. 7 版. 北京: 高等教育出版社, 2014:95-96.

[3] 李林圆. “知识—能力—素质”三位一体目标下大学数学混合式教学设计探究——以“函数的微分”一节为例 [J]. 高等数学研究, 2024,27(05).

[4] 赵朝军. 浅谈大学物理教学中微分和积分思想的应

用 [J]. 科技风, 2023(28).

[5] 周潜. 面向机械类专业的微分教学探索 [J]. 高等数学研究, 2023,26(05).

基金项目: 应急管理部研究中心、全国安全职业教育教学指导委员会 2025 年度应急管理理论政策及产教融合科教融汇课题《基于大数据分析的高职高数精准教学研究》(课题编号: AHKJRH2025001)

作者简介: 汤子豪(1993-), 男, 湖北仙桃人, 硕士, 讲师, 从事高等数学教学研究