

# 光折射路径的极值特性与多理论耦合机制研究

## ——从经典变分原理到量子路径积分

樊宇 吕乙松

重庆移通学院 重庆 401420

**摘要:** 本文通过五维理论框架系统分析了光在折射现象中的最优路径选择机制: 基于费马原理的几何光学证明折射路径的光程极值性; 波动光学中惠更斯原理的局限性揭示了相位与偏振效应的缺失; 电磁理论推导表明折射偏折源于介质极化导致的电场叠加; 诺特定理证实横向动量守恒对路径的约束; 路径积分理论则从量子层面阐释光通过振幅干涉筛选最优路径。这种多尺度研究方法不仅深化了对光折射本质的认识, 更为物理概念的教学提供了新的分析框架。

**关键词:** 斯涅尔定律; 费马原理; 电磁极化; 诺特定理; 路径积分

### 引言

折射定律(即斯涅尔定律)是光在折射现象中折射光线方向关系的定律, 数学表达式为  $\sin i_1 / \sin i_2 = n_2 / n_1 = n_{21}$ , 其中  $i_1$ 、 $i_2$  分别为入射角和折射角,  $n_1$ 、 $n_2$  分别表示介质 1 和介质 2 的折射率,  $n_{21}$  表示介质的相对折射率<sup>[1]</sup>。斯涅尔定律告诉了光在折射过程中的宏观现象即入射光线和折射光线的几何关系, 但其微观本质并不能从公式直观的看出来, 而且斯涅尔定律只告诉了光沿着怎样的路径传播, 而光为什么这样传播以及光是如何这样传播的并不能从公式直观地看出。本研究以光折射现象为切入点, 通过构建多尺度理论框架系统阐释了最优路径选择机制: 从费马原理揭示的光程极值性, 到惠更斯原理展现的波动特性局限; 从电磁理论阐释的介质极化效应, 到诺特定理论证的动量守恒约束, 直至量子路径积分描述的振幅干涉机制。这种“宏观-介观-微观-量子”的多层次分析方法, 不仅深化了对光折射本质的认识, 突破了传统单一理论解释的局限性, 更重要的是为物理概念的教学提供了新的认知框架, 使抽象的物理规律得以通过多角度互证的方式呈现, 有效降低了学习难度, 同时为新型光学器件的设计提供了理论指导。研究特别揭示了经典理论与量子描述之间的深刻联系, 对理解光与物质相互作用具有重要启示意义。

### 1 斯涅尔定律的几何光学描述

#### 1.1 斯涅尔定律的费马原理推导

费马原理基于光的直线传播定律、反射定律和折射定

律这三个几何光学基本实验定律, 将光的传播行为统一表述为“光在两点间传播时总是选择光程取极值的路径”这一普适性原理<sup>[2]</sup>。其数学表达式为

$$\int_A^B n \delta l = \text{Min} \quad (1-1)$$

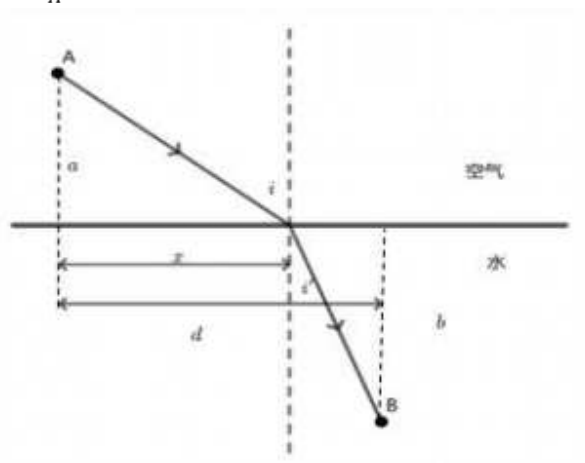


图 1 折射的极值路径

如图 1 所示, 光在空气与水两种介质的 A、B 两点间传播, 设点 A 和点 B 到介质分界面的垂直距离分别为  $a$  和  $b$ , AB 间水平距离为  $d$ , 点 A 到法线的水平距离为  $x$ 。根据几何关系, 光在两介质中的传播路径可分解为两段直线, 其总传播时间为

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}{v_2} \quad (1-2)$$

根据费马原理, 光沿耗时最短的路径传播, 对时间  $t$  关

于  $x$  求导并令其为零

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_1 \sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{d-x}{v_2 \sqrt{(d-x)^2 + b^2}} = 0 \quad (1-3)$$

由几何关系化简可得

$$\frac{\sin i}{v_1} = \frac{\sin i'}{v_2} \quad (1-4)$$

又因介质折射率  $n = \frac{c}{v} = \frac{ck}{\omega}$  ( $c$  为真空中光速), 则有

$$n_1 \sin i = n_2 \sin i' \quad (1-5)$$

## 1.2 最小作用量原理

从几何光学的视角分析, 斯涅尔定律所描述的光传播路径实质上对应于传播时间取极值的路径。在物理学中, 这一传播时间被定义为系统的作用量, 它表征了系统演化的内在规律性。基于这一认识, 费马原理可表述为“最短时间原理”。进一步推广至经典力学体系, 该原理可拓展为更具普遍性的最小作用量原理, 也称为平稳作用量原理。这一变分原理作为理论力学的基本原理之一, 当应用于机械系统时, 可通过变分法推导出系统的运动方程。这种极值原理不仅存在于光的传播过程中, 更是自然界普遍遵循的基本规律, 在能量最小化等众多物理现象中均有体现, 反映了自然界对最优化的内在追求。

## 1.3 斯涅尔定律的力学推导

哈密顿原理作为最小作用量原理的能量表述, 揭示了物理系统演化的核心规律: 由拉格朗日函数(动能与势能之差)构成的作用量泛函, 其真实路径必在极值附近保持稳定<sup>[3]</sup>。

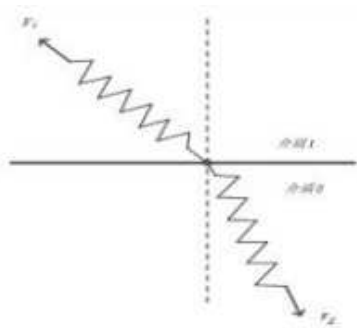


图2 折射的力学构造

如图2所示, 这一原理可将光的折射过程转化为力学模型阐释——入射光与折射光在介质分界面的传播特性, 可类比为两根“理论弹簧”的平衡状态, 弹力大小对应光程极值趋势, 弹性系数映射介质折射率。基于哈密顿原理,

分界面

处两“弹簧”的弹力切向分量需保持平衡, 即

$$F_1 \sin i = F_2 \sin i' \quad (1-6)$$

将弹力等效为折射率后, 自然推导出斯涅耳定律

$$n_1 \sin i = n_2 \sin i' \quad (1-7)$$

这一推导表明, 光对最短时间路径的选择, 本质是自然界“作用量最小化”普适原则的宏观体现, 印证了不同物理现象背后作用量极值约束的统一性。

## 2 斯涅尔定律的波动光学描述

### 2.1 斯涅尔定律的惠更斯原理推导

惠更斯原理是指波在传播过程中波前上的每一点都可以看作是发射子波的波源, 在其后的任一时刻, 这些子波的包络就成为新的波阵面<sup>[4]</sup>。

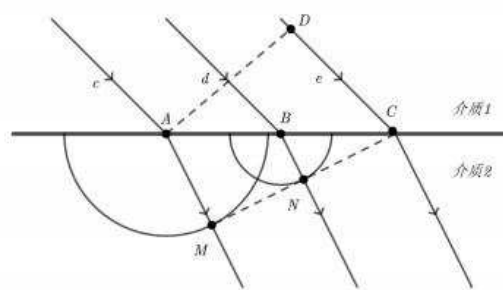


图3 折射的惠更斯原理

如图3所示, 以平行光折射现象为例, 当入射光  $c$ 、 $d$ 、 $e$  到达介质分界面时, 波前  $AD$  上的各点同步发射子波。以光线  $c$  为例, 其进入介质2后经时间  $\Delta t$  传播的距离为

$$L_{AM} = v_2 \times \Delta t \quad (2-1)$$

形成以  $A$  为圆心的子波圆弧; 与此同时, 光线  $d$  在介质1中传播至分界面  $B$  点, 进入介质2后形成以  $B$  为圆心、 $L_{BM}$  为半径的子波圆弧。由于入射光为平行光, 折射后的子波波前需保持平行, 因此两子波圆弧的公切线  $MC$  即为新的波前。

从几何关系看, 入射角  $i$  对应  $\angle DAC$ , 折射角  $i'$  对应  $\angle ACM$ , 基于波前传播的等时性, 可推导出入射角与折射角的正弦值之比等于两介质中波速之比, 即

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (2-2)$$

为斯涅耳定律的波动学推导提供了理论基础。

### 2.2 惠更斯原理解释折射现象的局限性

惠更斯原理在解释光的折射过程中还存在一些局限性。

例如, 惠更斯原理没有考虑相位的变化, 解释不了折射中的偏振, 没有考虑时间和空间的周期性等。也不能解决光在不同介质中折射的微观本质以及它是如何找到该路径的。虽然能够用修正后的惠更斯菲涅尔原理来解释一些现象, 但要想知道光在折射过程中的微观本质等还得从光是电磁波入手。

### 3 斯涅尔定律的辐射偶极子解释

#### 3.1 相速度与群速度

波的相速度是指波相位的空间传播速度, 其大小由介质电磁特性决定, 表达式为

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} \quad (3-1)$$

$c$  为真空光速,  $n$  为介质折射率。相速度方向与波前垂直, 而坡印廷矢量表征电磁波能量传播方向, 二者在各向同性介质中一致。群速度则描述波包振幅的传播速度, 仅在多频波叠加时与相速度产生差异, 光学中求解介质内光速通常指相速度。

#### 3.2 光在介质中的传播速度变慢

麦克斯韦方程组表明, 电磁波在介质中的传播速度由介电常数  $\varepsilon$  和磁导率  $\mu$  决定:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} \quad (3-2)$$

因介质的相对介电常数  $\varepsilon_r > 1$  且相对磁导率  $\mu_r \geq 1$ , 故  $v < c$ 。折射率反映了介质对光速的调制作用, 当  $n > 1$  时相速度小于光速, 而异常色散区  $n < 1$  时相速度虽超光速, 但群速度仍受相对论约束。

#### 3.3 介电常数与电磁波频率的关系

伦兹的经典电子论找到了电磁场频率和电介质的关系。电子论是指电磁波与物质之间的相互作用的本质为电磁波与物质中电子的相互作用。洛伦兹经典电子论通过 Drude 模型揭示介电常数与频率的关系

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty = \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\gamma\omega} \quad (3-3)$$

其中  $\varepsilon_\infty$  为无限频率处的介电常量,  $\omega_p$  为等离子频率, 其表达式为

$$\omega_p = \frac{\sqrt{N_e e^2}}{\varepsilon_0 m^*} \quad (3-4)$$

其中  $N_e$  为电子密度,  $m^*$  为有效质量。当光频接近原子固有频率时, 共振吸收导致介电常数呈现复数特性, 对应折射率为

$$n = n' - i n'' \quad (3-5)$$

虚部  $n''$  表征波的衰减, 这解释了大气对特定频段太阳光的吸收现象。

#### 3.4 折射率的受迫振动模型解释

光与介质的相互作用可视为电磁波驱动电子的受迫振动过程, 其外电场为

$$E = E_0 e^{i\omega t} \quad (3-6)$$

在外电场的作用下, 电子运动方程为

$$m_e \ddot{x} + \gamma m_e \dot{x} + w_0^2 m_e x = e E_0 e^{i\omega t} \quad (3-7)$$

解得振动位移  $x = x_0 e^{i\omega t}$ , 其辐射场与原场叠加形成透射波。通过电荷密度与极化强度的关联, 可导出折射率色散方程:

$$n = 1 + \frac{N_e e^2}{m_e^*} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 + i\gamma_j \omega} \quad (3-8)$$

该式表明不同频率光对同一介质折射率的差异, 为彩虹形成与棱镜分光提供了理论依据。

#### 3.5 斯涅耳定律的电动力学推导

基于麦克斯韦方程组的边界条件

$$n \times (E_2 - E_1) = 0 \quad (3-9)$$

入射波、反射波及折射波的波矢在界面切向分量守恒, 结合  $k = 2\pi n/\lambda$ , 立即得到斯涅耳定律

$$n_1 \sin i = n_2 \sin i' \quad (3-10)$$

这一推导揭示了折射的本质是电磁波在介质分界面的连续性约束。

#### 3.6 折射中光的传播方向发生偏转的原因

斯涅尔定律给出了光折射中入射角和折射角与介质的关系, 折射率就可以解释为光在折射前后传播方向改变的角度大小, 为什么光的传播方向在两种介质分界面会发生偏折电磁波的电场方向、磁场方向和传播方向相互垂直。光属于电磁波的一种, 同样满足该规律。

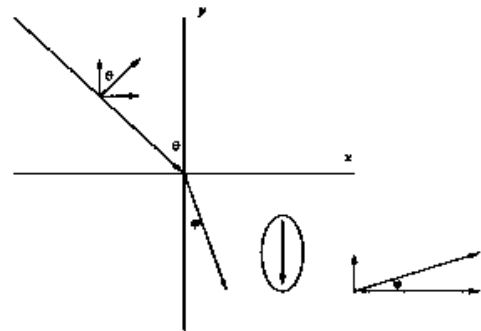


图 4 折射中的极化

如图 4 所示, 电磁波的电场可分解为平行于界面的  $x$  分量与垂直于界面的  $y$  分量。当光入射到介质面时,  $y$  方向电场驱动原子极化, 形成与原电场反向的极化电场, 导致  $y$  方向合场强减小; 而  $x$  方向电场因边界条件保持不变。由于光的传播方向与电场方向垂直,  $y$  向场强的减弱使波矢方向偏转, 偏转角度由极化强度决定——介电常数越大, 极化程度越高, 折射率与偏折角也越大, 这与  $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$  的理论预测一致。

#### 4 斯涅耳定律的诺特定理推导

诺特定理是指物理学中连续对称和守恒定律对应, 假设对某系统整体平移后保持不变, 则该系统平移对称, 空间平移对称动量守恒, 所以横向均匀介质不能

→

改变横向动量<sup>[5]</sup>。波矢  $k$  与光子动量存在正比关系, 当介质 1、介质 2 的界面垂直于  $z$  方向时, 光波在两介质中的横向传播方向需保持不变。由此可得, 波矢的横向分量在界面两侧相等, 即

$$k_{x1} = k_{x2} \quad (4-1)$$

根据波矢与角度的几何关系, 波矢横向分量可表示为

$$k^1 \sin i = k_2 \sin i' \quad (4-2)$$

#### 5 光折射最优路径的由来

##### 5.1 量子路径积分的定性解释

在量子世界中, 粒子的传播不受经典轨迹束缚, 可遍历所有可能路径, 每条路径都伴随一个复数振幅, 观测结果是所有振幅的相干叠加<sup>[7]</sup>。光在折射时呈现的宏观路径选择性, 本质是量子振幅干涉的统计结果: 满足斯涅耳定律的路径因相位变化平缓, 振幅叠加时发生相长干涉而保留; 其他路径因相位振荡剧烈, 振幅相互抵消, 观测概率趋近于零。这一机制与经典最小作用量原理相呼应, 而折射率可理解为光通过介质时量子振幅的相位旋转参数——折射率越大, 振幅相位偏移越大, 宏观上光线偏折越明显。光栅实验则直观验证了这一理论: 有限狭缝为光提供离散路径, 当路径满足特定相位条件时形成衍射主极大, 不满足条件的路径振幅相互抵消, 展现了光从“遍历所有可能”到“筛选唯一路径”的量子-经典过渡过程。

##### 5.2 路径积分的光栅缺级证明

光栅作为由大量等宽等间距平行狭缝构成的光学仪器, 其衍射条纹由单缝衍射与多缝干涉共同决定, 光栅方程为

$$(a+b)\sin i = \pm k\lambda \quad (k=0, 1, 2, 3, \dots) \quad (5-1)$$

其中  $a$  为缝宽,  $b$  为缝间不透明部分宽度,  $d=a+b$  为光栅常量,  $k$  为衍射级次。当满足缺级条件

$$k = \frac{a+b}{a} k' \quad (k' = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \quad (5-2)$$

多缝干涉主极大与单缝衍射极小重合导致条纹消失, 而当光栅常量  $d$  趋于零时 (单位宽度狭缝数无限多), 除  $k=0$  级外所有衍射条纹因缺级消失, 这一极限情形直观展现了光从“多路径干涉”向“唯一经典路径”的过渡, 验证了量子路径积分中极值路径因振幅相干叠加保留、非极值路径因相位振荡抵消的理论构想。

#### 6 结语

本研究通过几何光学、波动光学、电磁理论、守恒定律及量子路径积分等多维度理论框架, 系统阐释了光折射现象的本质规律。从费马原理与最小作用量原理出发, 明确了折射路径的时间极值约束; 通过惠更斯原理的局限性分析, 揭示了电磁理论介入的必要性, 进而基于麦克斯韦方程组与介质极化机制, 阐明了光速减缓与折射偏折的微观起源; 借助 Drude 模型与受迫振动理论, 建立了折射率与光频的色散关系, 完善了经典电磁理论的频率依赖性缺失; 诺特定理的引入证实了折射过程的横向动量守恒本质, 而量子路径积分与光栅缺级实验则从概率干涉角度, 揭示了光对最优路径的量子筛选机制。研究成果不仅构建了从宏观现象到微观机制的完整解释链条, 也为超材料设计、光量子通信等前沿领域提供了理论基石, 未来可进一步结合量子电动力学, 探索极端条件下光与物质相互作用的新规律, 推动光学理论与技术的深度融合。

#### 参考文献:

- [1] 凌晓辉, 王友文, 戴志平. 斯涅尔定律及其推广和应用 [J]. 物理通报, 2020(11):125-128.
- [2] 王伟民. 利用费马原理求解最值问题 [J]. 数理化解题研究, 2023, (28):104-106.
- [3] 任雨萌, 李艳辉. 路径的选择问题——从费马原理看聪明的光 [J]. 物理通报, 2017(02):58-59+65.
- [4] 吉光. 菲涅尔——波动光学的奠基者 [J]. 百科知识, 2021, (28):16-19.
- [5] 王俊杰, 杨艳芳, 何英, 等. 基于偶极子天线辐射反向往创建空间球形聚焦光斑 [J]. 光学学报, 2024, 44(10):436-443.

[6] 刘雷. 对称和守恒在物理学研究中的意义 [J]. 广西物理, 2021, 42(04): 36-38.

[7] 王瑞敏, 刘丹东, 徐忠锋. 利用费曼路径积分理论分析多光子干涉 [J]. 大学物理, 2021, 40(05): 1-4.

**作者简介:** 樊宇 (2000—), 女, 土家族, 重庆, 重庆移通学院, 本科, 助教, 主要研究方向: 物理学; 吕乙松 (1996—), 男, 汉族, 重庆, 重庆移通学院, 研究生, 讲师, 主要研究方向: 电子与通信工程。