

初中阶段利润问题教法的探究

——用二次函数解决利润问题

淳采琳

(独山子第三中学 新疆克拉玛依 833600)

【摘要】 用二次函数解决利润问题是初中阶段必须掌握,也是一类非常重要的必考题型。但是对于学生来说此类问题一直是他们的一大困难:读题过程中发现题目里涉及的数据或量太多,理不清数据之间的关系。因此为了清晰地展现题目中的量以及数据,本文采用表格的形式,方便整理数据,达到一目了然,清晰得出结论的目的。

【关键词】 利润;列表格;最值

DOI: 10.18686/jyfyzy.v2i7.27989

用二次函数解决利润问题是初中阶段必须掌握,也是一类非常重要的必考题型。此类题型其实是由初一所学的一元一次方程中利润问题至初三所学一元二次方程中利润问题,由等量关系至不等关系,由一次方程到二次方程,由一次函数到二次函数,由浅入深,逐步展开学习的,符合学生的认知与接受程度,但是对于学生来说无论在初中那一个段,掌握此类问题都是一个难点,也一直是初中教师关注的重点与难点,因此通过多年的教学经验,如下方式来解决此类问题,可以让学生简洁明了,快速掌握!

例:一种进价为40元的T恤,按售单价60元售出时,则每周能卖出300件,为提高利润,欲对T恤进行涨价销售定每涨价1元,每周销售量就减少10件,设定价为 x 元,利润 y 元,则为获得最大利润,定价 x 是多少元?

首先学生对这些要知道:进价(或成本),售价,利润三个量。还有它们之间的关系要明确:售价-进价=利润,还要会变形(这里不用变形)。

很多学生读题过程中发现题目里涉及的数据或量太多,难以理清之间数量关系,因此为了清晰地展现题目中的量以及数据,本文采用表格的形式,当然是简易表格,方便整理数据:

表1 题目中的量以及数据

	单进价	单售价	单利润	销量	总利润
变化前	40	60	20	300	单利 × 销量
涨价后	40	x	$x-40$	$300-(x-60)$	y

由上表可快速得到

$$y = (x-40)[300-10(x-60)]$$

值得强调的是,销量的确定,这是学生的难点所在:可以在黑板草稿处分析,

涨1元——少10件

涨 $(x-60)$ 元——少 $10(x-60)$ 件

这样学生更容易理解了!接下来对此二次函数进行整理,可用一般式用定点坐标公式进行寻找最值,也可用配方方法配成顶点式。

$$\begin{aligned} y &= (x-40)[300-10(x-60)] \\ &= -10(x-65)^2+6250 \end{aligned}$$

因为 $x-40 > 0$, $x-60 \geq 0$, $300-10(x-60) \geq 0$, $x > 0$ 所以 $60 \leq x \leq 70$, 当 $x=55$ 时, $y_{\text{最大}}=6250$

这个题目就完成了!

有了此题作铺垫,我们来看看九上数学课本第50页的探究2:

某商品现在的售价为每件60元,每星期可卖出300件,市场调查反映:如调整价格,每涨价1元,每星期要少卖出10件;每降价1元,每星期可多卖出20件。已知商品的进价为每件40元,如何定价才能使利润最大?

这里定(售)价没给出,可以直接设定价为 x ,发现利润随售价的变化而变化所以是函数关系,因此也需要设出来,设为 y ,可以类比以上通过列表来整理相关量及数据:

表2 相关量及数据

	单进价	单售价	单利润	销量	总利润
变化前	40	60	20	300	单利 × 销量
涨价后	40	x	$x-40$	$300-(x-60)$	y
降价后	40	x	$x-40$	$300+20(60-x)$	y

涨价前

$$y = (x-40)[300-10(x-60)] = -10(x-65)^2+6250$$

根据自变量取值范围可得:涨价时当 $x=55$ 时, $y_{\text{最大}}=6250$

降价后

$$y = (x-40)[300+20(60-x)] = -20(x-57.5)^2+6125$$

根据自变量取值范围: $x-40 \geq 0$, $60-x \geq 0$, $300+20$

$(60-x) \geq 0, x > 0, 40 \leq x \leq 60$, 所以此范围内 $x=57.5$, $y_{\text{最大}}=6250$

最后通过涨价, 降价发现最终定价 65 元时, 获得利润最大 6250 元。

此题让学生感觉较难在于数据繁多涉及涨价和降价两部分让学生产生混乱, 因此类比例题给出的做法分清楚两种情况, 列表格一目了然的将相关数据整理清楚, 可以直接得到函数解析式!

当然此题, 采用间接设法, 题目中难点销量更容易表示: 设涨价 x 元, 或降价 x 元, 利润 y 元来看列表:

表 3 相关量及数据

	进价	售价	单利	销量	总利润
变化前	40	60	20	300	单利 × 销量
涨价后	40	60+x	20+x	300-10x	y
降价后	40	60-x	20-x	300+20x	y

通过表格可直接得到: 涨价后

$$y = (20+x)(300-10x) = -10(x-5)^2 + 6250$$

自变量取值范围内: 即当涨价五元时, 最大利润为 6250 元。

降价后:

$$y = (20-x)(300+20x) = -20(x-2.5)^2 + 6125$$

自变量取值范围内: 即降价 2.5 元时最大利润为 6125 元。

最后结论, 涨价五元, 及定价 65 元时利润最大 6250 元。

经过以上题目的熟练, 接下来可以让学生采用此法清晰地整理课本 52 页综合应用第 8 题。课本综合应用通常对于学习成绩中等, 甚至中等偏上的, 理解掌握还是有一定难度的。下面来看看此题:

某宾馆有 50 个房间供游客居住, 当每个房间每天的定价为 180 元时, 房间会全部住满; 当每个房间每天增加 10 元时, 就会有一个房间空闲, 如果游客居住房间, 宾馆需对每个房间每天支出 20 元的各种费用, 房价定为多少时, 宾馆利润最大?

学生猛一看它是利润问题, 但是又好像不是刚刚讲过的类型, 一时有点不敢下手。但是仔细阅读题分析发现其实思路完全是一模一样的。量涉及费用(成本), 定价(售价), 单利润, 房间数(销量), 总利润, 因此难点在

于如何清晰整理数据、每天房间数的表达:

每增加 10 元——少 1 件房间

每增加 1 元——少 $\frac{1}{10}$ 件房间

解: 设每个房价定为 x 元, 宾馆利润为 y 元
依旧采用表格方式整理数据。

列表如下:

表 4 相关量及数据

	费用 (成本)	定价 (售价)	单利 润	房间数 (销量)	总利润
变化前	20	180	160	50	单利 × 销量
涨价后	20	x	x-20	$50 - \frac{1}{10}(x-180)$	y

于是可得函数 $y = (x-20) [50 - \frac{1}{10}(x-180)]$

$$\text{所以 } y = -\frac{1}{10}(x-350) + 13610$$

根据实际意义自变量范围: $x-180 \geq 0$,

$$50 - \frac{1}{10}(x-180) \geq 0, \text{ 解得 } 180 \leq x \leq 680$$

故因 $a < 0$, 当 $x=350$ 时, 宾馆获得利润最大为 13610 元。此题顺利完成。

利润问题, 一直是学生的一大盲区, 无论是对刚利润问题的 7 年级学生, 还是对于 9 年级的学生来说都会存在一定的问题! 利用二次函数来求最值其实做法和思路完成全延续的是 9 年级数学中一元二次方程中利润问题类型, 方程中利润问题是给定的定值, 而函数中利润是变化的量。因此利用此类表格完全用一样的方法来整理实际问题中的数据, 很快能够准确地列出方程, 从而解决实际问题! 当然, 不仅仅是利润问题可以利用表格来清晰地整理数据, 只要能将繁杂的数据抽取出来列成表格, 它都可以来帮助解决问题, 就达到了活学活用!

以上为有关二次函数解决利润问题的借助表格简洁整理数据的方法, 希望对此类知识学习有困难的同学有帮助, 借以抛砖引玉, 从而得到更多的解决问题的好方法!

作者简介: 淳采琳 (1980.2—), 女, 四川合川人, 中教一级, 研究方向: 中学数学教学。

【参考文献】

- [1] 义务教育教科书九年级《数学》课本. 人民教育出版社.
- [2] 义务教育教科书九年级《数学同步练习册》. 人民教育出版社.