

“同心鼓”游戏最佳策略的研究

——以2019年全国大学生数学建模竞赛B题为例

张慧泉 耿合静 蔡江讯 孔令波

1. (武汉华夏理工学院 湖北 武汉 430223)

【摘要】 本文对同心鼓和排球的碰撞过程进行运动分析, 首先基于动能定理、动量守恒定律和机械能守恒定律, 建立了理想状态下的鼓球力学模型. 在此基础上, 分别以颠球频率最高、用力 F 最小为目标函数建立了非线性规划模型, 从而使得在限定时长内颠球轮数更多或者游戏持续时间更长. 在球弹起的高度不低于鼓面 40cm 的约束条件下, 结合力学模型以及几何关系, 对所建立的非线性规划模型进行检验, 使用 LINGO12 软件求出了两种情形下的最佳策略. 进一步, 本文分析了实际颠球游戏中的影响因素, 并建立了相应的微分方程模型, 给出了初步方案, 契合实际颠球活动的需求, 对于实践具有一定的指导意义.

【关键词】 动能定理; 动量守恒定律; 机械能守恒定律; 非线性规划; 微元法; 转动定律.

1 引言

在“同心鼓”项目中能否取得好成绩取决于团队成员之间的配合、队员反应能力和团队协作合作能力. 项目所用排球的质量为 270g, 鼓面直径为 40cm, 鼓身高度为 22cm, 鼓的质量为 3.6kg. 队员人数不少于 8 人, 队员之间的最小距离不得小于 60cm.

在理想状态下, 每个成员都可以精确地控制用力方向、时机和力度. 项目开始时, 球从距离鼓面中心上方 40cm 处竖直落下, 并且反弹高度不得低于初始高度 40cm, 否则, 游戏停止. 现需探讨使用什么策略可以使得连续颠球的次数尽可能地多, 需要研究并提供游戏的最佳策略, 并给出该策略下的颠球高度.

2 问题分析

理想状态下, 可以将运动分解为球的下落过程、鼓与球的碰撞过程以及绳对鼓的施力过程三个阶段. 经受力分析可知, 鼓从最低点上升到最高点的运动是加速运动过程. 当鼓到达最高点时, 绳子处于水平状态, 而鼓和球恰好在绳子处于水平状态时发生碰撞. 设鼓在最低点时绳与水平方向的夹角为 θ , 绳上的力 $\vec{F}$ 在竖直方向的分量为 $\vec{F}\sin\theta$. 根据动能定理、动量守恒定律和机械能守恒定律可列出方程, 然后探讨颠球高度 $h(t)$ 与 θ 、 h_1 、 h_2 、 t 、 $\vec{F}$ 等物理量之间的关系, 最后对建立的非线性规划模型进行检验.

3 模型假设

假设 1: 绳为不可伸长的轻质绳.

假设 2: 忽略鼓与球运动过程中受到的空气阻力.

假设 3: 碰撞为完全弹性碰撞, 碰撞时间忽略不计.

假设 4: 鼓上升过程中, 绳子绕手转过的弧长近似为鼓上升的高度.

假设 5: 队员两次发力的时间间隔与排球每次从被颠起到落回鼓面的时间间隔相等.

假设 6: 不考虑鼓在碰撞后到准备状态时的复杂过程, 鼓静止等待的时间不计.

假设 7: 绳上的力为恒力, 成员力气不会衰竭.

4 符号说明

表 1 符号说明

符号	含义
M	鼓的质量
m	球的质量
D	鼓的直径
h_1	球初始时离鼓的质心的高度
h_2	鼓的质心离地面的高度
$h(t)$	球任意时刻上升高度
H	球每次上升最大高度
v_0	球达到最高点时刻的速度 (等于 0)
v_1	球碰撞前的速度
v_2	鼓获得的速度
v'_1	球反弹后获得的速度
v'_2	鼓碰撞后的速度
θ	绳子与水平面的夹角
L	绳长
$\vec{F}$	绳子受的拉力
F_z	绳子所受拉力的分力
t	两次鼓和球碰撞时间间隔
t_0	初始时球的下落时间
t_1	球任意时刻上升时间
T	每次球达到最大高度的时间
a	鼓碰撞前获得的加速度

5 鼓和球的力学模型的建立

理想状态下, 在保证颠球高度不低于 40cm 的前提下, 本文的目标是, 在游戏时长无限制的情形下, 使得“球击鼓、鼓碰球”的运动能一直循环进行下去; 或者, 在游戏时长有限制的情形下, 使得颠球个数最多. 假设每位成员的手仅仅在水平方向移动而无竖直方向的移动, 每个周期内的碰撞过程相同, 鼓和排球均在竖直方向上运动. 为此, 选取研究对象进行受力分析, 再根据动能定理、动量守恒定律和机械能守恒定律, 求解出球反弹的高度与碰撞时机、用力大小及初始夹角 θ 之间的关系.

初始状态时, 排球从距离鼓面中心上方 $h=40\text{cm}$ 处竖直落下, 在忽略空气阻力的情况下, 球做自由落体运动. 碰撞后球做竖直上抛运动. 绳与水平方向夹角为 θ , 鼓离地面高度为 h_2 , 同时, 几何关系满足: $h_1-h=11\text{cm}$, $L\sin\theta=11\text{cm}$ (11cm 为鼓身高度的一半).

游戏开始时, 排球做自由落体运动, 碰撞后做竖直上抛运动. 现分别对这两个过程列出运动学方程, 研究速度、位移、时间之间的变化规律.

对自由落体运动阶段分析可得: $h = \frac{1}{2}gt_0^2$, $v_1 = gt_0$, $v_1^2 = 2gh$. 其中, g 为重力加速度 (取 9.8m/s^2), t_0 为球的自由落体运动持续时间, h 为初始高度 (40cm).

对竖直上抛运动阶段分析可得: $v_0 = v'_1 - gt_1$, $H = \frac{v_1'^2}{2g}$, $h(t) = v'_1 t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$, $T = \frac{v_1'}{g}$. 其中, $v_0 = 0$, t_1 为球任意时刻上升时间, H 为最大上升高度, $h(t)$ 为球任意时刻上升高度, T 为到达最大高度所需时间.

球的运动阶段已分解为自由落体阶段和竖直上抛阶段. 目前的关键就是通过分析球和鼓的碰撞过程, 求解出球碰撞后获得的速度 v_1 . 下面对球和鼓的碰撞过程进行分析. 在球和鼓碰撞前的一瞬间, 鼓获得一个向上的速度 v_2 , 球自由落体获得一个向下的速度 v_1 . 选取竖直向上为速度的正方向. 整个系统遵循动量守恒定律、机械能守恒定律. 据此, 列出运动学方程:

$$\begin{aligned} Mv_2 + mv_1 &= mv'_1 + Mv'_2, \quad \frac{1}{2}Mv_2^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 \\ &= \frac{1}{2}Mv_2'^2 + \frac{1}{2}mv_1'^2. \end{aligned}$$

进一步结合已知条件、几何关系和运动学方程求解出 v'_1 . 再将鼓的上升位置和碰撞时刻的位置确定, 并以此为理想位置. 碰撞后始终保持能够达到该理想位置状态, 并且使颠球运动以周期循环进行.

球的两个运动阶段得到解决后, 不讨论鼓在碰撞后恢复到准备状态的复杂过程, 现只需分析鼓由最低点从静止向上运动的过程. 突破口在于能否确定出鼓碰撞前获得的初速度 v_2 . 球与鼓的碰撞过程遵循完全弹性碰撞规律. 基于碰撞的受力分析, 并结合上述几何关系, 对鼓的运动进行分解, 根据动能定理和牛顿第二定律可得: $(F\sin\theta - Mg)L\sin\theta = \frac{1}{2}Mv_2^2$, $F\sin\theta = Ma$, $v_2 = Ta$. 其中, a 为鼓碰撞前获得的加速度.

求解结果和结论: 经过以上分析, 易求解出该策略下的各个物理量的初始值: $t_0 = 0.29\text{s}$, $v_1 = -2.8\text{m/s}$, $v'_1 = 2.4\text{m/s}$, $v_2 = 0$, $v'_2 = -0.39\text{m/s}$. 所以, 该最佳策略在理想状态下是可行的, 对实际颠球游戏具有一定指导意义.

6 颠球模型的非线性规划策略

前文所建模型的目标是使得连续颠球的个数尽可能多, 现考虑将其他参量作为策略目标. 考虑如下两种情形.

①如果规定项目时间有限 (即项目在限定时长内进行), 那么目标可以是使相邻两次碰撞的时间间隔最短, 即颠球频率最高, 从而在规定时间内颠球个数最多.

②如果项目时长不限定, 就需要保证在颠球高度不低于 40cm 的前提下, 团队所用力 F 最小, 从而使得颠球项目能持久进行, 也就是每个队员在自己体力范围内使颠球个数最多.

为此, 我们建立时间 t 最短和力 F 最小的非线性目标规划. 在这两种情形下, 要想给出最佳协作策略, 需要准确地判断出初始时鼓距水平位置下移的高度是多少? 团队应该给鼓施加多大的力? 鼓和排球在多长时间 (从排球下落时开始计时) 后发生碰撞? 这些因素能够经过受力分析得出, 并且能根据非线性规划模型求得最优解.

对于情形①, 有方案 1:

$$\begin{aligned} \text{目标: } \min t \\ \text{s. t. } v'_1 \frac{t}{2} - \frac{1}{2}g\left(\frac{t}{2}\right)^2 \\ &= H, H \geq 0.4, mgh + \frac{1}{2}Mv_2^2 \\ &= \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}Mv_2'^2, \\ FL\sin^2\theta &= \frac{1}{2}Mv_2^2 + mgL\sin\theta. \end{aligned}$$

对于情形②, 有方案 2:

$$\begin{aligned} \text{目标: } \min F \\ \text{s. t. } v'_1 \frac{t}{2} - \frac{1}{2}g\left(\frac{t}{2}\right)^2 \\ &= H, H \geq 0.4, mgh + \frac{1}{2}Mv_2^2 \\ &= \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}Mv_2'^2, \\ FL\sin^2\theta &= \frac{1}{2}Mv_2^2 + MgL\sin\theta. \end{aligned}$$

对于这两个非线性规划模型, 使用 LINGO12 软件, 求出变量最优解, 结果如下表所示.

表 2 方案 1 策略结果

人数 (n)	初始角 (θ)	绳长 (L)	力 (F)
12 人	28.6°	1.7m	100.8N

表 3 方案 2 策略结果

人数 (n)	初始角 (θ)	绳长 (L)	力 (F)
8 人	28.6°	1.7m	58.2N

综上所述, 方案 1 是在游戏时长有限制的情形下, 采用保证两次循环颠球时间间隔最短的策略, 从而实现在限定时间内颠球个数最多的目标; 方案 2 是在游戏时间不限定的情形下, 采用保证团队所用力 F 最小的策略, 从而实现颠球能持久进行且颠球个数最多的目标. 因此, 如果事先知道游戏规则, 就可以根据规定选取上述方案作为最佳颠球策略.

7 实际情况中颠球模型的优化

现实中往往是难以保证碰撞持续多次后颠球高度仍然不低

于40cm的。项目中,颠球高度对每个成员的发力时机、力度、方向和恒力作用时间及碰撞时刻较为敏感,所以需要合理地近似化处理。

在一个有外力作用的系统中,仍然认为系统机械能守恒,这样是不够严谨的。在同心鼓游戏中,其实一直有外力 F 作用在鼓上,因此严格意义上机械能并不守恒。而上述模型一直假设绳子水平时,鼓与球发生碰撞,在现实情况中不一定恰好如此。现对于上述模型进行优化。

在碰撞过程中,碰撞的时间点是不确定的,因此鼓与球不一定每次都恰好在绳水平时碰撞。现将碰撞转化为小球碰撞模型。在碰撞过程中碰撞位置不再是可控的,由于绳子角度是不断变化的,故建立微分方程模型来寻求最佳策略。

任意时刻,鼓与球在竖直方向上的位移有如下关系: $S_{\text{球}} = \frac{1}{2}gt^2$,

$t \cdot \frac{dS_{\text{鼓}}}{dt} = \frac{1}{2}at^2 + h_2 = \frac{1}{2} \frac{F \cdot \sin\theta}{M} t^2 + h_2$ 。其中 $S_{\text{球}}$ 、 $S_{\text{鼓}}$ 表示分别表示球、鼓在竖直方向的位移。

对上式中的微分方程两边同时积分得, $S_{\text{鼓}} = \frac{1}{2} \frac{F}{m} (\int_0^t t^2 \cos\omega t dt + \int_0^t h_2 dt) \sqrt{b^2 - 4ac}$ 。

将鼓上升的高度近似为绳子绕队员的手转过的弧长,结合

球初始高度0.4m这一条件,得到如下微分方程模型:

$$\begin{aligned} S_{\text{球}} + S_{\text{鼓}} &= 0.4 + h_2, S_{\text{球}} = \frac{1}{2}gt^2, S_{\text{鼓}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{F}{M} \left(\frac{t^2 \sin\omega t}{\omega^2} + \frac{2t \cos\omega t}{\omega^4} - \frac{2 \sin\omega t}{\omega^5} \right), \omega \\ &= \frac{\theta}{t} = \frac{S_{\text{鼓}}}{l}. \end{aligned}$$

此模型跳出了碰撞过程中机械能守恒、碰撞时绳子恰好到水平位置的理想假设,如果给定颠球高度,则可求出队员发力 F 、绳子长度 L 、初始角 θ ,所得结果将会更符合一般情况。此模型给出的实际颠球方案,对于实践具有一定的指导意义。

8 结语

(1) 本文在正确并清晰地分析了整个运动过程的基础上,将颠球过程进行了合理简化,并做出合理近似,大大减小了计算难度和问题复杂度。

(2) 根据不同的目标,分别建立了非线性规划模型,给出了两个不同的可行方案。

(3) 采用微元法,作出合理假设,建立了使得用力最省或者颠球频率最高的最优策略,从而使颠球个数最多的目标得以实现。

参考文献

- [1] 司守奎,孙兆亮. 数学建模算法与应用(第二版)[M]. 国防工业出版社,2016.
- [2] [德] 斯托克编,吴锡真等译. 物理手册[M]. 北京:北京大学出版社,2004. 1.
- [3] 诸德超,邢誉峰. 点弹性碰撞问题之解析解[J]. 力学学报,1996.
- [4] 蔡振碧,杨诚成. 球与平板碰撞时间的理论计算及实测[J]. 实验研究与探索,1995.
- [5] 万士保,力昌英. 大学物理教程[M]. 武汉:武汉理工大学出版社,2014.