不同载荷集度下简支梁的弯矩分析

米志豪　任红涛 *
（聊城大学 山东聊城 252000）

【摘　要】 由梁上载荷的不同变化，剪力、弯矩、载荷三者存在着一定的微分关系。我们根据载荷集度、剪力和弯矩三者之间存在的微分关系：弯矩方程的一次导数为剪力方程，剪力方程的一次导数为载荷方程。借此关系，我们可以更轻松的对简支梁在不同载荷集度情况下进行弯矩分析。

【关键词】 载荷集度；剪力；弯矩；微积分
DOI: 10.18686/jyfzyj.v3i10.58279

分布荷载是作用于整个物体或其某部分上的荷载，其类型下的线荷载是在一个细窄的维度上一个互相平行的载荷，因此可以将其简化为沿细长方向中轴线分布的载荷，在材料力学的表现上就是梁上的荷载。在材料力学中剪力、弯矩和载荷是表示不同类型梁的重要物理量，本文主要研究简支梁的。因此研究载荷和弯矩的关系对于解决现实生活中的工程力学问题具有突出的指导意义。本文将从材料力学的基础理论和实践过程出发，通过微积分理论具体讨论不同载荷集度对弯矩的影响。

1、剪力、弯矩和载荷三者之间的微分关系

1.1 剪力符号的规定

由剪力和弯矩的符号规定，我们可以直接判断出外力的符号：在梁的左侧截面上，存在向上作用的外力或在梁的右侧截面上存在向下作用的外力，则它们在该侧梁上产生的剪力符号为正，反之为负；若梁的左侧截面上的外力对中心的力矩为顺时针转向或梁的右侧截面上的外力对中心的力矩为逆时针转向，则在该梁的左右截面上产生的弯矩符号为正，反之产生为负。

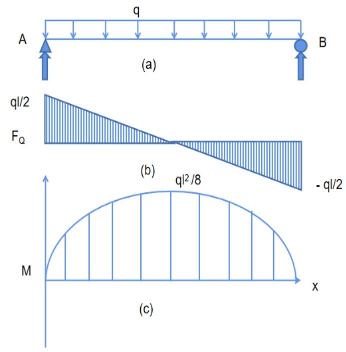
1.2 弯矩、剪力和载荷集度之间的微分关系

在研究梁的问题中，载荷、剪力和弯矩可以很方便地反应其（本文以简支梁梁为例）基本特性。根据实验分析，由梁上的载荷变化情形，由此得出这样的结论，当物体受到外在载荷作用时，其物体内部就会产生剪力，让物体发生弯折作用，最后以弯矩的形式展现。一般而言，梁内的剪力和弯矩大小和方向都随横截面的面积、位置变化而变化，而其随梁的长度的变化的关系式，就是剪力方程和弯矩方程的表达式。

弯矩方程的一次导得剪力方程，剪力方程的一次导得载荷方程，反之，载荷方程的一次积分得剪力方程，剪力方程的一次积分得弯矩方程，故载荷方程的二次积分得弯矩方程。

$$\frac{dQ(x)}{dx} = qx \quad (1) \qquad \frac{dM(x)}{dx} = Qx \quad (2) \qquad \frac{d^2M_{(x)}}{d^2x} = qx \quad (3)$$

方程 (1) 的意义为剪力在某一截面处的切线斜率等于该截面的荷载集度的大小。方程 (2) 的意义为弯矩图在某截面处的切线斜率等于该截面的剪力。方程 (3) 的意义为载荷的正负（即指向）可以确定弯矩图的正负方向。我们以简支梁为例，如图 (a) 所示，当简支梁受到均匀载荷 q 的作用时，可以应用静力学平衡原理，将结构中的一个部分，从与它相联系的周围部分分离开来，求出剪力和弯矩方程分别为：(1) $M(x) = \frac{1}{2}q_l - qx^2$ (2) 并作出剪力图 (b) 和弯矩图 (c)。通过图 (b) 和 (c)，可以得到梁内最大剪力为 $Q_{max} = \frac{ql}{2}$ 和 $M_{max} = \frac{ql^2}{8}$. 对式 (1) 和式 (2) 求导数，则可以获得：$\frac{dQ(x)}{dx} = -q$ (3) $\frac{dM(\chi)}{dx} = \frac{q_L}{2} - qx = Q(x)$ (4)



（Ⅰ）

由此我们可以得出，弯矩方程的一次导数为剪力方程，剪力方程的一次导数为载荷方程。进而我们获得载荷、剪力、弯矩三者之间的微分关系。开展三者之间的微分关系的研究，对于实际工程及现代生活都有重大意义。

2、各种形式载荷下的弯矩图

一个函数的一阶导数等于函数曲线上各点切线倾角的正切，也就是切线的斜率，而二阶导数等于曲线上各点切线的斜率改变率。因此，由分布载集度度、剪力、弯矩三者间的导数关系，可以推导出分布载荷集度、剪力图、弯矩图之间的几何关系：

1、梁上某点处的载荷集度 q 等于剪力图上相应点处的斜率。

2、梁上某点处的剪力 Q 等于弯矩图线上相应点处的斜率。

3、梁上某点处的载荷集度 q 等于弯矩图线上相应点处斜率的变化率。

从以上的讨论可看出，分布载荷集度、剪力和弯矩三者之间存在着必然联系，而且利用这些关系还可以得到绘制剪力图、弯矩图的基本规律。下面我们就来探究不同载荷集度下对弯矩变化的影响。

2.1 无载荷作用的梁段；

剪力图为水平线，弯矩图为斜直线，斜率的大小等于对应梁段上剪力的大小。V>0 时弯矩图形向下倾斜，V<0 时弯矩图形上倾斜，V=0 时弯矩图为一条水平线（如下表所示）。斜线上升或下降的竖直高度等于该梁在这一段剪力图的面积。

2.2 均匀载荷作用的梁段；

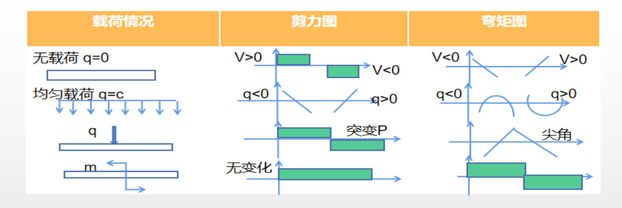
均匀载荷作用时，剪力图为一条倾斜的直线，其斜率大小等于载荷的集度大小，方向与载荷集度方向一致。弯矩图为二次抛物线，其凹凸的方向与载荷集度的方向一致。剪力图为倾斜直线时，该斜线上升或下降的竖直高度大小等于该梁在这一段载荷图的面积，弯矩图为二次曲线，对剪力符号为正的部分，弯矩图为向下的曲线，曲线下降的竖直高度大小等于该梁在这一段剪力图的面积，反之，其符号相反。

2.3 集中载荷作用的梁端；

集中载荷作用时，剪力图发生突变，突变的方向与集中荷载的方向一致，突变大小为发生集中荷载的大小。弯矩图出现尖角方向与集中力的方向相同。

2.4 集中力偶作用截面;

截面上发生集中力偶作用时，剪力图没有任何变动，而弯矩图发生突变作用，突变作用的方向由力偶的转向决定，逆时针向上，顺时针向下。突变大小等于力偶矩的大小。



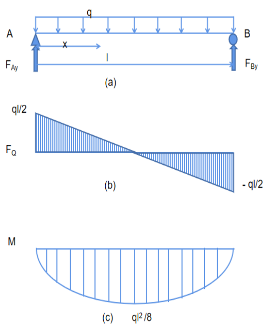
（II）

实际工程简化模型（简支梁）在不同载荷集度下的弯矩图

简支梁就是，梁的两端搭在两个支撑物上，一端固定约束，一端铰链约束，从现实工程来看，简单来说就是两端支撑在柱子上的梁。但支撑物仅约束梁的垂直位移，梁的一端还可自由转动。我们为了使整个简支梁不产生水平方向的位移，在一端加设水平约束，另一端不加水平约束。由于简支梁在现实中受到支座移动、混凝土钢材聚变，温度的变化等产生影响不大，因此其受力简单，在材料力学作为力学简化模型进行使用分析。

下面我们以简支梁为例，具体阐述不同载荷集度下的剪力图和弯矩图。

当简支梁受到均匀载荷作用时，如图（a）所示。



(Ⅲ)

第一步：求约束反力 由对称关系可得 $F_{Ay}=F_{By}=\frac{1}{2}ql$. ①

第二步：列剪力方程和弯矩方程 $F_Q(x)=F_{Ay}-qx=\frac{1}{2}ql-qx$. ②

$M(x)=F_{Ay}x-\frac{1}{2}qx^2=\frac{1}{2}qlx-\frac{1}{2}qx^2$. ③

第三步：画出剪力图和弯矩图 , 如图（b）(c) 所示。

其剪力最大值在梁端，其值为 $F_{max}=\frac{1}{2}ql$. ④

其弯矩最大值在中间，其值为 $M_{max}={}^1/_8\,ql^2$. ⑤

当简支梁受到集中力偶作用时，如图（a）所示。

第一步：求约束力 $F_{Ay}=F_{By}=\frac{Me}{L}$⑥

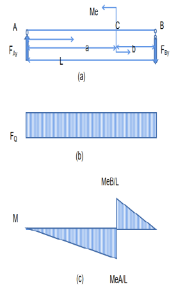
第二步：列剪力方程和弯矩方程

AB 段：$FQ(x)=\frac{Me}{L}(0<x<l)$⑦

AC 段：$M(x)=F_{Ay}x=\frac{M_e x}{L}(0\le x\le a)$⑧

CB 段：$M(x)=F_{Ay}X-Me=\frac{Mex}{L}-M_e(a<x\le l)$⑨

第三步：画出剪力图和弯矩图，如图（b）（c）所示。



（IV）

当简支梁受到集中力作用时，如图（a）。

第一步：求约束力$F_{Ay}=\frac{FB}{L}\cdot F_{By}=\frac{F_A}{L}$⑩

第二步：列剪力方程和弯矩方程

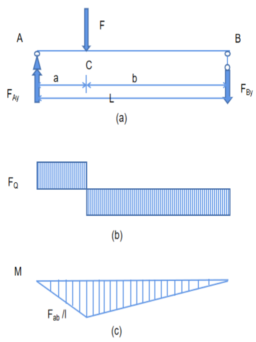
AC 段：$F_{Q(x)}=F_{Ay}=\frac{FB}{L}(0<x<a)$⑪

$M(x)=F_{Ay}x=\frac{FB}{L}(0\le x\le a)$⑫

CB 段：$F_Q(x)=F_{Ay}-F=\frac{FB}{L}-F=\frac{FA}{L}(a<x<l)$⑬

$M(x)=F_{Ay}x-F(x-a)=\frac{FA}{L}(l-x)(0\le x\le l)$⑭

第三步：画出剪力图和弯矩图，如图（b）（c）所示。



（V）

综上所述，我们可以利用剪力、弯矩、载荷三者之间的相互关系（弯矩方程的一次导得剪力方程，剪力方程的一次导得载荷方程），来准确的列出剪力方程和弯矩方程，避免解题麻烦，获得事半功倍的效果。不仅保证了剪力图、弯矩图的理论基础，还有对力学工程中简化模型的分析与推广有着很大的实际意义。

基金项目： 聊城大学博士后启动基金项目号：318052054

参考文献

[1] 唐静静 范钦珊 . 工程力学（静力学和材料力学）第 3 版 . 高等教育出版社 .
[2] 韩瑞功 . 工程力学 [M]. 北京：清华大学出版社，2004.
材料力学中载荷集度、剪力、弯矩之间的关系 . 杨杰 .《承德民族职业技术学院学报》.2006.6.30.
[3] 剪力、弯矩与荷载集度之间的关系 .《互联网文档资源（http://max.book 118. c）》.
[4] 建筑力学 静定结构内力计算 杆件变形的概念 .《互联网文档资源（https://max.book118.）》.
[5] 梁的剪力弯矩图《互联网文档资源 （http://wenku.baidu.c）》.