

圆轴扭转中扭矩对扭转角度的影响

王涵 任红涛*
(聊城大学 山东聊城 252000)

【摘要】 在圆轴扭转的过程中，外加力偶、扭矩与扭转角度存在着密切的联系。由于材料整体处于平衡状态，我们可以利用平衡原理和截面法来求解。通过外加力偶与扭矩平衡，我们可以画出扭矩图，利用微积分知识则可以得出扭转角度。

【关键词】 外加力偶；扭矩；扭转角度；微积分；求和

DOI: 10.18686/jyfyzy.v3i10.58293

1、扭矩和扭转角度的积分关系

1.1 扭矩的确定与符号的规定

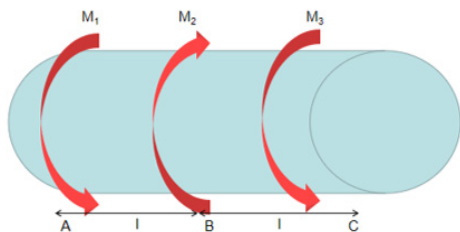
利用截面法来确定扭矩：在圆轴上任意选取一个截面，因为圆轴存在着外力偶矩，可以根据受力平衡确定，其横截面上的内力偶矩应当与外力偶矩平衡，由此可以得到相应的内力偶矩，也可以称为扭矩。

采用右手螺旋法则可以判断扭矩的符号：右手四指代表扭矩旋转方向，大拇指代表其矢量方向，若扭矩矢量方向与截面外法线方向相同，则扭矩为正，反之为负。

1.2 扭矩与扭转角度的积分关系

当在弹性范围内时，我们可以得到以下两个公式进行分析扭转角度。

当刚体受到的扭矩不连续时（如图一所示），



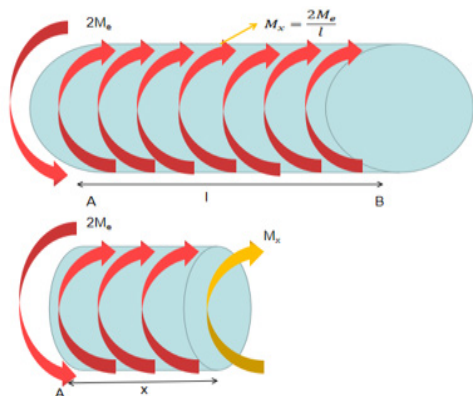
图一

扭转角度可以表示为： $\varphi = \sum \frac{Mx_i l_i}{G I_p}$ （公式1），此时圆轴上的总扭转角为各部分扭转角的代数和。

然而当刚体所受扭矩连续变化时（如图二所示），

$$M(x) = 2M_e - \frac{2M_e}{l}x = 2M_e \left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad (\text{公式2})$$

$$\varphi_{AB} = \int_0^l \frac{Mx(x)}{G I_p} dx = \int_0^l \frac{2M_e \left(1 - \frac{x}{l}\right)}{G I_p} dx = \frac{M_e l}{G I_p} \quad (\text{公式3})$$



$$\text{当应力满足许应力时，即 } \tau_{\max} = \frac{M_{x\max}}{W_p} \leq [\tau], \quad (\text{公式4})$$

我们可以求得最大扭转角度。

2、扭转角度随扭矩的变化关系

在正应力的作用下，圆轴将会产生相应的扭矩。而在扭矩的作用下，圆轴会发生相应的扭转，并产生相应的扭转角度，我们可以将材料分为弹性材料和脆性材料。根据两种材料的特性，对其扭转角度进行分析求值。

材料特性	弹性材料（低碳钢）	脆性材料（铸铁）
性能曲线		
材料性能	<ul style="list-style-type: none"> * 弹性阶段，外加扭矩不超过弹性范围 M_e 时，变形呈现弹性，卸载后试样无残余变形； * 当超出弹性范围，即进入屈服阶段和强化阶段时，变形不再呈现弹性，卸载后试样不再回复原来的状态； M_e 为残余扭转切应变为 0.3% 时扭矩，M_b 为试样断裂前的最大扭矩 	<ul style="list-style-type: none"> * 直线部分不明显，且无屈服变形
扭转角度的变化	<ul style="list-style-type: none"> 弹性阶段，扭转角度与扭矩成正比 $\varphi \propto M$，扭转角度随着扭矩的增大而变大； 屈服、强化阶段，M 变化很小时，而相应的扭转角度 $\Delta\varphi$ 变化很大，但不成正比关系。 	<ul style="list-style-type: none"> * 脆性材料，扭转角度随着扭矩的增加而变大，但并不成正比的关系。
扭转角度的求解公式	弹性阶段： $\varphi = \sum \frac{Mx_i l_i}{G I_p}$ ； $\varphi = \int \frac{Mx(x)}{G I_p} dx$ 非弹性阶段：此阶段应力与应变已经不在满足胡可定律，所以求解扭转角度时不可在运用求和和积分。	因为脆性材料没有弹性阶段，因此它的应力与应变也不满足胡克定律，所以不能够采用 $\varphi = \frac{Mx}{G I_p}$ 来直接进行求解扭转角度。
扭转失效形式	屈服、断裂	脆性断裂

从上述分析我们可以得出 $\varphi = \frac{Mx}{G I_p}$ 的适应条件，必须在弹性范围内，所受力矩连续不连续均可。

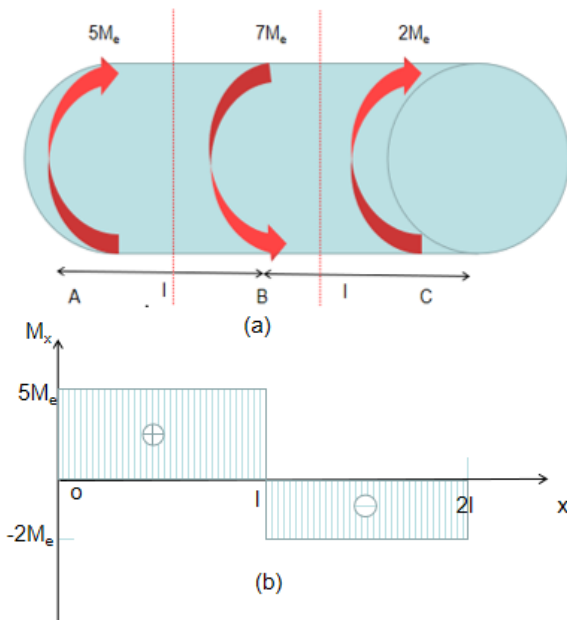
3、实际工程中扭转角度的简化模型

在材料力学中，强度与刚度是分不开的，而这两者之间都与扭矩有关。因为存在着最大扭矩，由相应的计算公式我们可以得到最大的强度与刚度，所以只有材料的强度和刚度小于等于最大值，才能使得材料在安全范围内进行应用。

在实际工程中，扭转角度是个不可忽视的工程量。例如螺丝的扭紧问题。因为不同的螺栓扭转角度是不同的，但它们有一个共同点：就是都存在着一个最大值，即 $\tau_{max} = [\tau]$ 。通过相应的公式转化，我们可以得到一个最大扭矩，再根据 $\varphi = \frac{MxI}{GIp}$ ，就可以得到了最大扭矩角度。

但在实际应用中，存在着大部分扭矩被摩擦力消耗，而只有一小部分扭矩转化为夹紧力。所以我们可以计算出的最大扭矩角度应当大于实验测量的值，因此存在着一些误差。

下面我们通过简单的模型对扭转角度进行计算分析
当外加力偶非连续变化时（如图三所示）：



图三

第一步 选取截面，列平衡方程——求扭矩，如图三（a）
根据整体平衡原则和外力偶矩与扭矩平衡。我们可以得到相应的扭矩值。

取 AB 之间的截面，由右手螺旋定则可知 M_{x1} 为正值；
根据平衡原理：

$$M_{x1} = 5M_e$$

取 BC 之间的截面，由右手螺旋定则可知 M_{x2} 为负值；
根据平衡原理：

$$M_{x2} = -2M_e$$

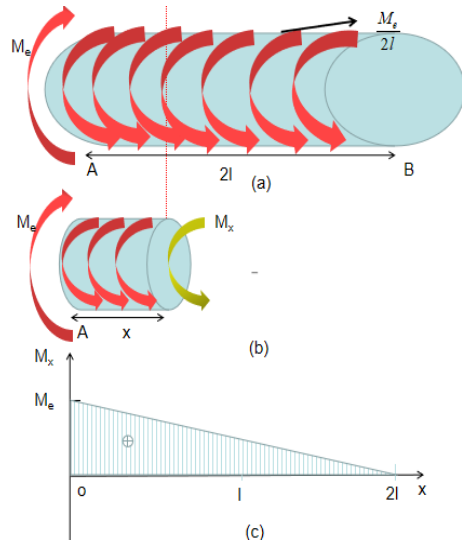
第二步 根据求出的扭矩画出扭矩图，如图三（b）

第三步 根据扭矩图和公式 $\varphi = \frac{MxI}{GIp}$ ，则可以求出扭转角度。

因为圆轴同直径且为同种材料，所以 G 与 I_p 为一正值，
所以

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{M_{x1}l}{GIp} + \frac{M_{x2}l}{GIp} = \frac{3M_e l}{GIp} \quad (\text{公式 5})$$

(2) 当外加力偶连续变化时：



图四

第一步 选取截面，列平衡方程——求扭矩，如图四（a）

根据整体平衡原则，外力偶矩与扭矩平衡，扭矩与扭矩平衡的原则。

在 AB 之间任取一截面，长度为 x。如图四（b），由整体平衡和右手螺旋定则可以得出此扭矩为正值。所以：

$$M(x) = M_e - \frac{M_e}{2l}x = M_e \left(1 - \frac{x}{2l}\right) \quad (\text{公式 6})$$

第二步 根据扭矩画出扭矩图，如图四（c）

第三步 根据扭矩图和公式 7，则可以求出扭转角度

$$\varphi_{AB} = \int_0^{2l} \frac{Mx(x)}{GIp} dx = \int_0^{2l} \frac{2M_e \left(1 - \frac{x}{2l}\right)}{GIp} dx = \frac{M_e l}{GIp} \quad (\text{公式 7})$$

因为圆轴同直径且为同种材料，所以 G 与 I_p 为一正值。

因此通过积分可得： $\varphi = \frac{M_e l}{GIp}$

综上所述，我们可以利用外加力偶和扭矩的关系，通过积分与求和的法则进行计算，可以得到相应的扭转角度。也可以通过扭矩图直接得出相应的扭矩，再进行列式得出相应的扭转角度。通过计算量与标准量进行比较，可以充分得出材料是否符合标准。虽然实际应用中的材料比简化模型要复杂的多，干扰因素也不计其数，但简化模型是解决实际问题的一个工具，为我们解决实际问题提供了一个简便的方法。对解决实际问题具有很重要的意义。

基金项目：聊城大学博士后启动基金项目号：318052054

参考文献

[1] 唐静静, 范钦珊. 材料力学 (静力学和材料力学) 第 3 版, 高等教育出版社.
[2] 沈洁. 螺栓扭矩—转角控制法. 22 页. 上海汽车集团股份有限公司乘用车公司质保部, 2010-4-20.
[3] 机械基础中职业立体精品教案 .doc.《网络 (https://www.niuwk.co) 》, 2020.