

黄金分割的应用

汪家兰

(福建师范大学 福建福州 350117)

【摘要】 黄金分割是世界上最优美的比例之一，它充分体现了数学的美学价值，在生产和生活中的应用越来越广泛。本文介绍了黄金分割的简史、定义、尺规作图、基本性质及其在生产生活中的应用，最后，总结了黄金分割的教育意义。

【关键词】 黄金分割；斐波那契数列；黄金图形；性质与应用

DOI: 10.18686/jyfyzy.v3i10.58345

从古希腊时期起就有学者发现了黄金分割这一神奇比例，其中毕达哥拉斯、欧多克索斯等数学家对黄金分割的理论贡献最大。经过这几位数学家的经过不懈的努力，才打造出这么一份数学文化宝藏。黄金分割不仅应用在建筑、音乐等学科，它在自然界中也到处都有它的身影，被美学家誉为最具和谐性的形式美的分割比。黄金分割理论是整个人类的宝贵文化，更是数学文化中的宝藏，具有巨大的教育价值。

1、黄金分割简史

黄金分割最早出现在公元前6世纪，大多数人认为黄金分割是古希腊毕达哥拉斯学派在研究正五边形的作图时发现的。过了2世纪左右，古希腊数学家欧多克索斯对黄金分割问题进行了系统的研究，并建立了比例理论。而后，在公元前300年左右，欧几里得对黄金分割进行进一步研究，并在《几何原本》中系统论述了黄金分割，《几何原本》被认为是最早的研究黄金分割的论著^[1]。在十二、十三世纪的欧洲，莱昂纳多·斐波那契在《计算之书》以“兔子问题”提出了著名的“斐波那契数列”。在斐波那契数列中，数列相邻前后两项之比的极限就是黄金分割数：0.618^[2]。到了文艺复兴时期，黄金分割已经被欧洲数学家誉为“最宝贵的算法”，许多欧洲人也认为黄金分割是“金法”。因此，黄金分割在欧洲深受欧洲人民的欢迎。中世纪后，黄金分割则有了神秘的色彩，被认为是神圣的比例。

2、黄金分割定义

黄金分割是一个在各种几何和运算中出现的比率。在下图1的等边三角形中，我们发现点A、B、C之间有相同的比例。C（即AC与AB的比例，AB与BC的比例是相同的）。

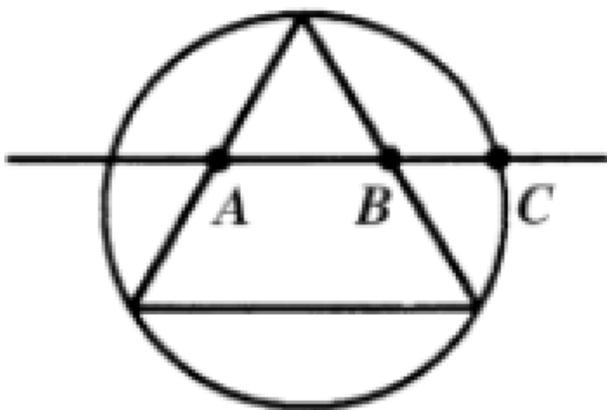


图1

同样的比例也出现在图2和图3的正方形和正五边形中。

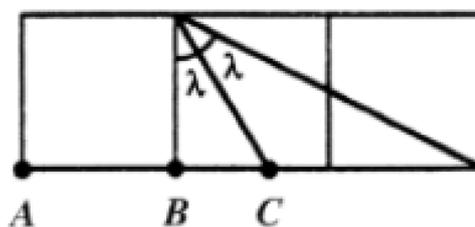


图2

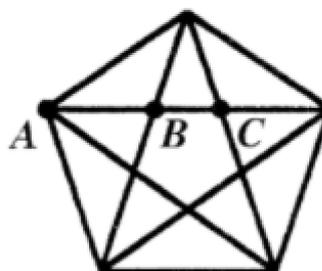


图3

下文将会介绍这个比例与黄金分割的关系。那么什么是黄金分割？

为了回答这个问题，我们做了如下定义。如果一条线段分割后，大段与小段的比率，整段与大段的比率，这两个比率是相同的。那么这样的分割是按照黄金分割的比例划分的，或者说按照黄金比例划分的^[3]。如果整条线段的长度AC为1，大段的长度AB为x，那么小段的长度BC为1-x，如下图4所示。

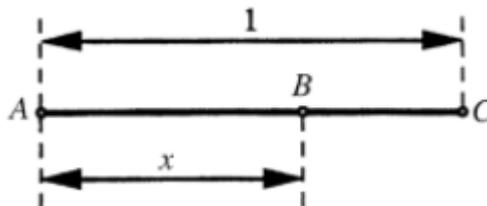


图4

根据黄金分割的定义，线段AB、BC、AC有如下关系：

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BC}$$

$$\text{由此可得 } \frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

从而,可以得到一个一元二次方程 $x^2 = 1-x$

$$\text{解得: } x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618, x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1.618,$$

因为要 x 大于 0, 所以 $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$,

我们把具有这种分割比例的分割方式叫做黄金分割, 点 B 叫做线段的黄金分割点。线段 AC 与线段 AB 的比被称为黄金比, 线段 AC 与线段 AB 的比值 0.618 就称为黄金分割数。在正三角形、正方形、五角星形等图形中都有这一“黄金”比例^[4]。

3、黄金分割的应用

3.1 黄金分割与人体奥秘

3.1.1 黄金分割与人体结构

意大利著名画家达·芬奇在研究人体比例结构时发现, 人体存在着五个黄金分割点恰好对应人的五处要害。这五个黄金分割点由上往下分别是: 鼻子是人整个头部的黄金分割点; 咽喉是头顶到肚脐部分的黄金分割点; 人的肚脐是头顶到足底的黄金分割点; 膝盖是肚脐到足底部分的黄金分割点; 肘关节是肩关节到中指指尖的黄金分割点。如果一个人身体的各部分的比例都达到黄金分割比, 那么这个人身体可以说是最标准的体型^[4]。人体黄金分割比的发现, 为体型的标准评价提供了科学依据。无论是人体造型设计, 还是人物摄影, 在涉及人体比例时, 都深受人体结构黄金分割比的影响。比如在生活中, 不少女性会利用高跟鞋增加腿长, 从视觉上拉长下半身的长度, 或者通过高腰裙适当缩短上半身, 拉长下半身, 从而使上半身与下半身的比例达到黄金分割比, 从整体视觉上来看, 更具有协调的美感。

3.1.2 黄金分割与健康

众所周知, 人正常的体温范围在 36°C 至 37°C 左右。那么对于人体来说什么温度是最适宜的呢? 有研究表明, 人在环境温度在 22°C 至 24°C 时感觉最舒适。在这一环境温度中, 机体的各项生理状态均处于最佳。而人体的适宜环境温度正好接近人正常体温范围 36°C 至 37°C 与黄金分割数 0.618 相乘后所得温度范围为: 22.248°C 至 22.866°C ^[5]。除此之外, 当人体内的水分占体重的 61.8% 则不计出汗。医学专家还发现, 饭吃七分饱左右的人几乎不生胃病; 当人的脑电波高低频率比为 1:0.618 时, 是人的身心最快乐的时刻。

参考文献

- [1] 趣谈黄金分割 [J]. 语数外学习 (高中版中旬), 2017, (04): 62.
- [2] 张媛. 美妙的“黄金分割” [J]. 安徽电子信息职业技术学院学报, 2006(04): 32-33+35.
- [3] 司志本. 黄金分割——神圣的分割 [J]. 湖南第一师范学报, 2003(01): 60-62+64.
- [4] 闫晓玲. 有趣的黄金分割 [J]. 内蒙古电大学刊, 2005(09): 53-54.
- [5] 高勇. 人体健康的黄金分割点 [J]. 药物与人, 2011, 24(06): 55.
- [6] 凌珑. 生活中黄金分割比的应用 [J]. 商业故事, 2018, (05): 131.
- [7] 丁建军. 生活中的“黄金分割” [J]. 语数外学习 (初中版八年级), 2009, (Z2): 63-65.
- [8] 侯雪征. 黄金分割构图法在风景油画构图中的作用 [D]. 河北师范大学, 2017.

3.2 黄金分割与艺术

3.2.1 黄金分割与音乐

不少音乐家也发觉适当在其作品中运用黄金分割能使作品更优美。曾有数学家指出, 在莫扎特全部的钢琴奏鸣曲中, 只有极少数钢琴奏鸣曲没有用到黄金分割比。18 世纪德国著名的作曲家与音乐家贝多芬在作曲《命运》时就运用了黄金分割比^[6]。《命运》使用移位的手法, 在移位的部分中最后的音阶长度与之前的音阶长度相比, 增长了一倍, 因此前后在长度上的比值约等于黄金分割比, 这样的创作手法让听者感觉到仿佛是命运在不停的敲击, 让听者感受到创作者所要表达的情感^[6]。

3.2.2 黄金分割与建筑

文艺复兴时期, 有意识地运用黄金分割设计建筑几乎是建筑界的“潜规则”。例如: 位于雅典的帕特农神殿威严肃穆, 是世界上具有代表性的建筑之一, 据测量, 帕特农神殿的大门顶部高达约 19m, 宽约 31m, 两者的比值约为 0.613, 近似等于黄金分割比例; 著名的埃菲尔铁塔也运用了黄金分割比, 以观景台为分割点, 其中下方与上方高度的比值就是 0.618^[7]。在建筑设计上运用黄金分割比, 可以让建筑看起来和谐美观。

3.2.3 黄金分割与绘画

黄金分割构图法是黄金分割比例运用到绘画中, 按照黄金分割的比例将画面进行分割, 形成新布局的一种新型的绘画构图方法^[8]。画家经常使用这种构图方法进行创作构图, 在我国传统绘画一书《画论》中也有类似于黄金分割构图的论述, 叫做“三七停”。将画面主体安排在画面布局的黄金分割点附近, 不仅能避免对称式构图的呆板, 还可以突出画面的主体, 画面更具美感。在画作中将黄金分割运用到极致的画家当属 15 世纪优秀的艺术家达·芬奇, 以世界名画《蒙娜丽莎》为代表, 整个画作都是黄金比例。

3.3 黄金分割与植物

自然界中许多植物的生长也与黄金分割有关。不少几乎观赏性的花卉, 如: 牡丹、月季、菊花等, 在这些花含苞待放时, 花蕾长轴与短轴的比例大致接近于黄金分割; 在有些植物的茎上, 两片相邻的叶片的夹角是 $137^{\circ}28'$, 这恰好是把圆周分成 1:0.618 的两条半径的夹角。据研究发现, 这种角度对植物通风和采光效果最佳。因此, 在种植植物时可以利用该规律, 促进植物的生长。

4、总结

黄金分割在高中以“数学文化”形式出现在学生的视野, 从自然界到社会无一不透露着它的和谐美, 结合具体的例子能够使使学生领略到由生活到数学的文化魅力。因此, 黄金分割等数学专受到越来越多数学教育界学者的关注。越来越多的一线数学教师通过黄金分割等数学文化专题帮助学生认识社会发展与数学学科间的内在联系, 提升学生的应用意识与文化素养。