PMRL 教学模式的理论和实践案例

王存荣 张宗国

（齐鲁工业大学（山东省科学院）数学与统计学院 山东济南 250353）

【摘 要】PMRL 教学模式是问题引领 (problems lead)、否定假设法指导 (the method of denying hypotheses guides) 下的复习课 (revision lesson) 教学模式，它是一线数学教师遭遇低效的复习课后，在问题引领数学教学的理论和实践基础上进行行动研究的结果. PMRL 教学模式以教师呈现原问题为教学起点，师生共同解决原问题后，从原问题的主要属性出发，进行联想思维生成知识树，应用否定假设法设计问题串，且在解决问题串的过程中应用知识和巩固知识. PMRL 教学模式的实践案例是在学生学习了空间解析几何中的向量、直线和平面后的一次复习课，它充分展示了 PMRL 教学模式在教学实践中的实效性.

【关键词】PMRL 教学模式；原问题；问题串；知识树

DOI: 10.18686/jyfzyj.v3i10.58366

复习课是使知识系统化、培养学生应用知识解决问题能力的教学过程。但是，在复习课上，学生没有了新授课的新鲜感和好奇心，教师也很少注重激发学生的学习主动性和积极性，使得复习课的有效性大打折扣。我们在数学教育教学实践中坚持问题引领数学教学原则，构建了问题引领 (problems lead)、否定假设法指导 (the method of denying hypotheses guides) 下的复习课 (revision lesson) 教学模式，简称 PMRL 教学模式。PMRL 教学模式不仅能够激发学生学习数学的兴趣，还能够提升学生提出问题和解决问题的能力。

1、PMRL教学模式的理论

PMRL 教学模式以教师呈现原问题为教学起点，师生共同解决原问题后，从原问题的主要属性出发，进行联想思维生成知识树，应用否定假设法设计问题串，且在解决问题串的过程中应用知识和巩固知识（如图 1）。

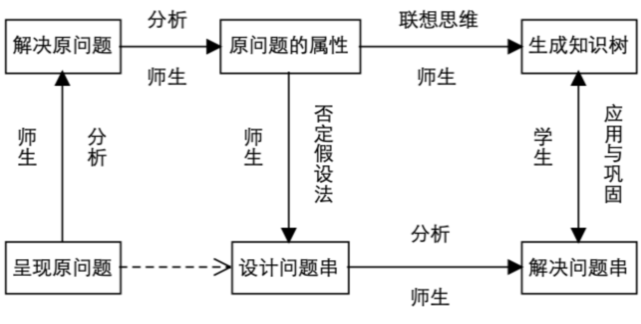

图 1 PMRL 教学模式

PMRL 教学模式是一线数学教师遭遇低效的复习课后，在问题引领数学教学的理论和实践基础上进行行动研究的结果。所谓问题引领数学教学是以问题为教学的基本内容和主要手段，以问题解决活动为主要学习方式，以培养学生的数学素养为根本目的，将师生反思贯穿始终的教学过程。问题引领数学教学倡导学生在问题解决中学习，在学习中解决问题，“问题引领，知识跟进，能力提升”和“教师指导，学生主体，反思贯穿”是其核心理念。[1] 设置问题串是 PMRL 教学模式的主要环节，否定假设法是学生学会设计问题的关键方法，学生在否定假设法指导下设计问题串，在师生反思中选择有价值的问题，从而激发学生学习数学的兴趣，培养学生的反思能力以及提出问题的能力。

2、PMRL教学模式的实践案例

本案例是在学生学习了空间解析几何中的向量、直线和平面后的一次复习课，它充分展示了 PMRL 教学模式在教学实践中的应用性和实效性。

2.1 呈现和解决原问题

呈现原问题的主体一般是教师，解决原问题的主体一般是学生，学生在教师的指导下分析和解决问题。

原问题：求过点 $M_0(1,-2,1)$ 且垂直于两个已知平面：$x-2y+z-3=0$，$x+y-z+2=0$ 的平面方程。

分析：设所求平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，由已知，得 $\begin{cases} A-2B+C+D=0, \\ A-2B+C=0, \\ A+B-C=0 \end{cases}$

解得所求平面方程为：$x+2y+3z$。「1」

「1」文中各个问题的解决方法可能不止一种，但本文都只呈现一种解题方法。

注：所用方法：待定系数法；所用知识点：平面的一般式方程，相互垂直的两平面的法向量也相互垂直。

2.2 引导学生分析原问题的主要属性

点$M_0(1,-2,1)$也应该是一个属性，但是，为了使问题串中的问题比较适合学生的解题能力，此属性不列为主要属性。原问题的主要属性有四个，属性$1'$：垂直，属性$2'$：两个，属性$3'$：平面，属性$4'$：平面方程。

2.3 应用联想思维，生成知识树

联想思维是指在人脑内记忆表象系统中由于某种诱因使不同表象发生联系的一种思维活动。联想思维运用概念的语义、属性的衍生、意义的相似性来激发创新思维，它是打开沉睡在头脑深处记忆的最简便和最适宜的钥匙。联想思维有五种类型：接近联想、相似联想、对比联想、因果联想和类比联想。[2]

联想思维在我们的学习中起着很大的作用，它可以挖掘和构建不同思维对象间的内在联系，它有利于信息的储存和检索。应用联想思维进行复习可以建立知识间的联系，形成知识组块，完善学生的认知结构，提升学生应用知识解决问题的能力。

从原问题的主要属性和解题过程所用的知识出发，延拓属性，联想知识，复习知识，生成知识树（如图2）。所谓延拓知识是将原问题各属性中概念的外延适当扩大。比如：将原问题的属性$1'$：垂直延拓为属性1：位置关系，将原问题的属性$4'$：平面方程延拓为属性4：方程。知识树中呈现了14个知识点，原问题的解决过程中，用到了第1个、第7个和第10个知识点。

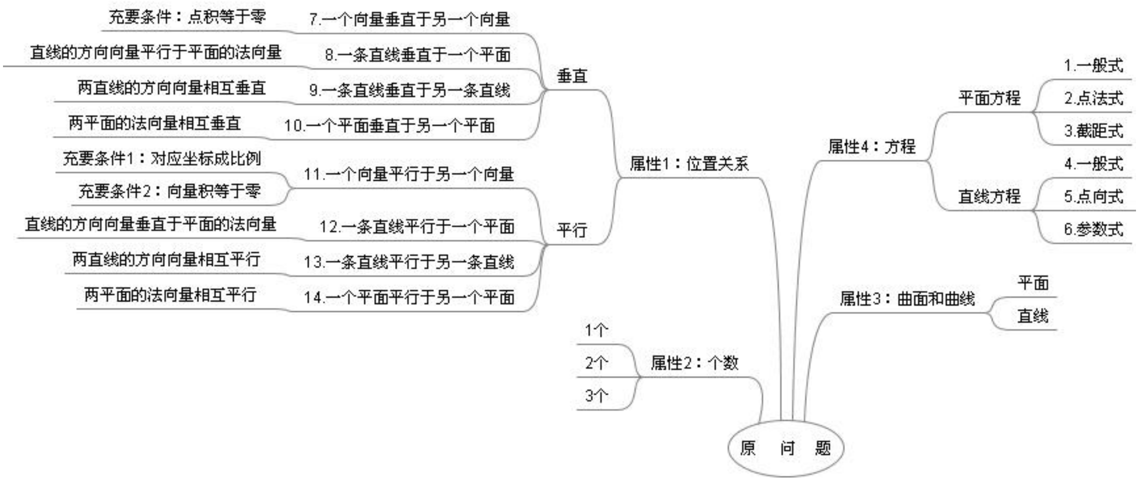

图2 应用联想思维 生成知识树

2.4 应用否定假设法，设置问题串

2.4.1 否定假设法

美国学者布朗（S。Brown）与沃尔特(M。Walter)给出了提出问题和设计问题的一般方法。[3]

确定出发点，这可以是已知的命题、问题或概念等；

对所确定的对象进行分析，列举出它的各个“属性”；

就所列举的每一“属性”进行思考：“如果这一‘属性’不是这样的话，那它可能是什么？”

依据上述对于各种可能性的分析提出新的问题；

对所提出的新问题进行选择。

由于这一方法的核心步骤是第三步，所以这一方法就被称为“否定假设法”。

在应用否定假设法时，我们要审视、思考和追问它的属性是什么(what)，如果这些属性不是这样(if not)，结果会怎么样(how)等问题。即对“WINH”的反思，对“WINH”的反思可以揭示概念的本质，把握知识间的内在联系，深化运算法则的认识。当然，应用否定假设法对“WINH”的反思，必须在学生的最近发展区内，不然，会适得其反。

2.4.2 设置和解决问题串

雅斯贝尔斯曾指出，教育不能简化为知识的堆积。“学习者只有在认真思考他自己发现的问题，追求符合于自己的知识和理解力的答案时，才能真正地在学习。”[4]这里设置问题的主体应该是学生，从原问题出发，学生应用“否定假设法”，通过“头脑风暴”可以提出许多问题，但是，并不是提出的所有问题都是有价值的。由于学生所掌握知识和经验的限制，教师一定要充分发挥“对话性他者”的作用，对学生设置的问题进行及时的选择和修正。“所谓‘对话性他者’意味着，在学生的‘最近发展区’内，能够起到促进学生学习发生跳跃的、一种‘脚手架’的作用。”[5]合作学习的学生也能够发挥“脚手架”的作用，但是教师的作用和学生的作用在性质上是不同的。教师作为“对话性他者”，首先能够启发学生提出或直接提出学生应该提出而又不能提出的问题，从而诱发和促进学生的自我反思；其次是引导学生不断地捕捉、选择、判断、重组各种有价值的数学问题，使之成为智慧的火种。对价值不大的问题，要及时的排除和处理，以保证数学教学的有效性。再次是教师的“他者性”可以使师生保持适度的距离，使学生积极地开展自己的学习，成为自主的学习者。[6]

应用否定假设法设置问题串不仅能够培养学生提出问题的能力，还使学生在解决自己提出问题的过程中，应用、复习和巩固已经学过的知识，亲身体验数学知识的应用价值。上面已经分析了原问题的几个主要属性。属性$1'$：垂直，属性$2'$：两个，属性$3'$：平面，属性$4'$：平面方程。

比如：学生改变属性 $1'$，呈现问题：求过点 $M_0(1,-2,1)$ 且平行于两个已知平面：$x-2y+z-3=0$，$x+y-z+2=0$ 的平面方程。这时，教师应该发挥“对话性他者”的作用，引导学生思考：已知两个平面有什么样的位置关系？平行于两个相交平面的平面存在吗？在此基础上，呈现问题 1 和问题 2。事实上，问题 1 不仅改变了原问题的属性 $1'$（垂直），还改变了属性 $2'$（两个）。一般情况下，应用否定假设法以问题为出发点来提出问题或编制问题时，要涉及到两个属性或多个属性的同时改变。

问题 1：求过点 $M_0(1,-2,1)$ 且平行于已知平面：$x-2y+z-3=0$ 的平面方程。

分析：所求平面的法向量与已知平面的法向量相互平行，用平面的点法式方程，即可求出平面方程为：$x-2y+z-6=0$。

注：在此问题的编制和解决过程中，用到了第 1 个、第 2 个和第 14 个知识点。

问题 2：求过点 $M_0(1,-2,1)$ 且平行于两个已知平面：$x-2y+z-3=0$，$x+y-z+2=0$ 的直线方程。

分析：已知两个平面的法向量的向量积就是所求直线的方向向量，然后，应用直线点向式即可得到直线方程：$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{3}$。

注：在此问题的编制和解决过程中，用到第 5 个和第 12 个知识点。

改变属性 $2'$ 和属性 $3'$，呈现问题 3。

问题 3：求过点 $M_0(1,-2,1)$ 且垂直于直线 L：$\begin{cases}x-2y+z-3=0,\\x+y-z+2=0\end{cases}$ 的平面方程。

分析：首先求出已知直线的方向向量，然后应用平面的点法式方程，即可求出平面方程为：$x+2y+3z=0$。

注：编制问题 3 及其解决的过程中，用到第 1 个、第 4 个、第 8 个和第 2 个知识点。

改变属性 $2'$ 和属性 $4'$，呈现问题 4。

问题 4：求过点 $M_0(1,-2,1)$ 且垂直于已知平面：$x-2y+z-3=0$ 的直线方程。

分析：已知平面的法向量就是所求直线的方向向量，然后应用直线方程的点向式方程就可求出直线方程为：$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{1}$。

注：此问题的解决过程中，应用到第 1 个、第 5 个和第 8 个知识点。

改变了多个属性后，呈现问题 5。

问题 5：求过点 $M_0(1,-2,1)$，垂直于已知平面：$x-2y+z-3=0$，且平行于直线：$\frac{x-1}{4}=\frac{y+4}{2}=\frac{z+1}{1}$ 的平面方程。

分析：已知平面的法向量和已知直线的方向向量的向量积就是所求平面的法向量，然后，应用平面的点法式方程，既得所求平面方程：$4x-3y-10z=0$。

注：此问题的编制和解决过程中，用到第 1 个、第 2 个、第 5 个、第 10 个和第 12 个知识点。

当然，问题串的设置还可以从子问题出发设计，并且要使学生复习的知识更全面，可以设置不止一个原问题。比如：在文中问题串的解决过程中，反复用到向量积的运算，但是这一知识点并不在知识树中，因此，可以设置向量运算方面的原问题，以生成向量运算方面的知识树。事实上，学生掌握了这一教学模式和否定假设法后，就可以成为呈现原问题的主体，这样更能充分发挥学生的主体作用，提高教学的有效性。

基金项目：齐鲁工业大学（山东省科学院）2020 年校级教研项目“高等数学课程思政的理论与实践研究”（项目编号：2020szzx23）。

参考文献

[1] 王存荣 . 职业能力视角下的高职数学课程改革 [J]. 中国职业技术教育 ,2011.23:65-69.

[2] http://wiki.mbalib.com/.

[3] 王存荣. 在反思性数学教学中培养学生提出问题的能力 [J]. 数学教育学报 2009(1):45-47+66.

[4] 弗罗斯特. 西方教育的历史和哲学基础 [M]. 北京 : 华夏出版社 ,1987.350.

[5] 佐藤 • 学著 , 钟启泉译. 学习的快乐 — 走向对话 [M]. 北京 : 教育科学出版社 ,2004:46.

[6] 王存荣. 行动导向教学中要处理好的几对关系 [J]. 教育探索 ,2011(7):60-61.