

# 复变函数中多角区域上的共形映射探究

周彦斌

内蒙古师范大学数学科学学院 内蒙古呼和浩特 010022

**摘要:** 共形映射是复变函数中最基本的问题之一, 它已广泛用于物理和工程领域。本文主要讨论如何使用解析方法来解决多角区域上共形映射问题, 分析了 Schwarz-Christoffel 公式, 并通过实例探究广义多角区域共形映射的求解。

**关键词:** 多角区域; 共形映射; Schwarz-Christoffel 公式

## Discussed on the Conformal Mapping on the Polygonal Region in the Function of Complex Variable

Yanbin Zhou

School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia Normal University, Hohhot, Inner Mongolia, 010022

**Abstract:** Conformal mapping is one of the most basic problems in complex functions. It has been widely used in the fields of physics and engineering. This article mainly discusses how to use analytical methods to solve the problem of conformal mapping on the polygonal region, gives the Schwarz-Christoffel formula and its generalized form, and explores the solution of the generalized polygonal region conformal mapping through example analysis.

**Keywords:** the polygonal region, Conformal mapping, Schwarz-Christoffel formula

### 1 引言

共形映射是复变函数理论重要内容之一, 它成功地解决了物理学、电学、光学、热学、电磁学、力学等诸多方面的问题<sup>[1-3]</sup>。在实际问题中共形映射具有重要的作用。例如, 在求解复杂的裂纹构型时, 采用正常的应力无法解决问题。利用共形映射理论, 则可以将复杂的裂纹形状转换为简单的形状。简单裂纹形状问题利用力学知识很容易求出裂纹尖端的应力, 同样对复杂形状问题可以通过共形映射的逆变换获得。本文主要介绍在复变函数教学中多角区域上的共形映射的理论的证明以及应用。

### 2 Schwarz-Christoffel 定理

**定理 1 (Schwarz 对称原理<sup>[1-2]</sup>):** 满足 (1) 以  $s$  为公共边界且在  $s$  两侧对称的区域分别为  $C$  与  $C^*$ ; (2) 以  $t$  为公共边界且在其两侧对称的区域为  $D$  与  $D^*$ ; (3) 存在  $f(z)$  使得  $C \xrightarrow{f(z)} D$ , 边界  $s \xrightarrow{f(z)} t$  一一对应, 且在  $C+s$  上连续, 则存在  $F(z)$  将  $C+s+C^*$  共形映射成  $D+t+D^*$ , 且对

任  $z \in C+s$ ,  $F(z) = f(z)$ 。

**证明<sup>[2]</sup>:** 根据定理可知  $s$  为圆弧, 由共形映射可知存在线性变化  $\zeta = L(z)$ , 此线性变换将圆弧  $s$  映射到  $\zeta$  平面上的一条线段  $\alpha$ 。  $\zeta = L(z)$  将  $C$  映射到  $\zeta$  中的一个区域  $c$ , 且  $C^*$  被  $\zeta = L(z)$  映射到  $\zeta$  中的一个区域  $c^*$ 。  $c$  和  $c^*$  关于  $\alpha$  对称, 且分别位于  $\zeta$  的上、下半平面。存在另外一个线性变换  $\xi = M(z)$  可将圆弧  $t$  映射到  $\xi$  平面上的一实轴段  $\beta$ , 并通过此线性变换将  $D$  与  $D^*$  共形映射为  $\xi$  平面上的区域为  $d$  和  $d^*$ , 它们分别位于上、下半平面上, 并且关于  $\beta$  对称。由条件 (3),  $F^*(\zeta) = M(f(L^{-1}(\zeta)))$  将  $c$  共形映射为  $d$ , 且  $\alpha$  与  $\beta$  一一对应。令

$$F^*(\zeta) = \begin{cases} f^*(\zeta), & \zeta \in c \\ \overline{f^*(\zeta)} = f^*(\bar{\zeta}), & \zeta \in \alpha \\ f^*(\bar{\zeta}), & \zeta \in c^* \end{cases} \quad (1)$$

则有 Cauchy 定理, 可得:

$$\int_{\Gamma} F^*(\zeta) d\zeta = \int_{\Gamma_+ + t} F^*(\zeta) d\zeta + \int_{\Gamma_- - t} F^*(\zeta) d\zeta \quad (2)$$

上式中  $\Gamma$  是区域  $c + \alpha + c^*$  与线段  $\alpha$  相交的简单闭曲线;  $\Gamma_+$  和  $\Gamma_-$  分别表示  $\Gamma$  在  $c$  和  $c^*$  的部分曲线;  $t$  为  $\alpha$

**基金资助:** 内蒙古自然科学基金项目 (2020LH01011)

在 \$\Gamma\$ 内部的部分曲线。根据 Morera 定理, 可得 \$F^\*(\zeta)\$ 在 \$C \cup \alpha \cup C^\*\$ 上单叶解析。不妨令

$$F(z) = M^{-1}\{f^*(L(z))\} \quad (3)$$

则 \$F(z)\$ 将 \$C+s+C^\*\$ 共形映射为 \$D+t+D^\*\$, 且 \$s\$ 与 \$t\$ 一一对应。

当 \$z \in C + s\$ 时, \$L(z) = \zeta \in C + \alpha\$, 由 (1) 式, 可得:

$$F^*(L(z)) = f^*(L(z)) = M(f(z)) \in d \quad (4)$$

从而 \$F(z) = M^{-1}\{F^\*(L(z))\} = f(z)\$, 这样 \$F(z)\$ 就是要求的。

根据对称原理, 可以讨论多角形区域到单位圆盘以及上半平面间共形映射问题, 即 Schwarz-Christoffel (施瓦兹-克里斯托菲尔) 变换。

设 \$L\_n\$ 是由 \$n\$ 条折线段所围的单连通区域。各顶点依次为 \$\omega\_1, \omega\_2, \dots, \omega\_n\$, 则 \$L\_n\$ 各顶点内角可表示为 \$\alpha\_k \pi, \omega\_{k+1} - \omega\_k\$, 其内角介于 \$0\$ 到 \$2\pi\$ 之间, 记为 \$\alpha\_k \pi, k=1, 2, \dots, n, 0 < \alpha\_k < 2\$。由平面几何知识, 可得:

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = n - 2 \quad (5)$$

**定理 2 (Schwarz-Christoffel 定理<sup>[2]</sup>):** 设 \$f(z)\$ 将单位圆域 \$D: |z| < 1\$ 映射到多角区域 \$L\_n\$ (内角为 \$\alpha\_k \pi, k=1, 2, \dots, n\$), 则 \$f(z)\$ 为:

$$f(z) = a \int_0^z \prod_{k=1}^n (z - z_k)^{\alpha_k - 1} dz + a' \quad (6)$$

其中 \$a, a'\$ 为常数; 圆周上的 \$z\_k\$ 是 \$f(z)\$ 映射下对应于 \$L\_n\$ 的顶点 \$\omega\_k\$ 的点。

**证明<sup>[1-2]</sup>:** 设 \$F(\omega) = F(z)\$ 的逆函数。依定理可知 \$F(\omega)\$ 将 \$L\_n\$ 映射成单位圆域。设以 \$\omega\_k\$ 为中心的充分小的圆域与多角域 \$L\_n\$ 的相交部分为 \$S\_k\$, 这里要求 \$S\_k\$ 中只含有多角域 \$L\_n\$ 的一个顶点 \$\omega\_k\$。我们可以取函数 \$\zeta = (\omega - \omega\_k)^{1/\alpha\_k}\$ 的主值支, 在此函数的作用下将 \$S\_k\$ 共形映射为以原点为中心的半圆域 \$S'\_k\$ (如图 1)。

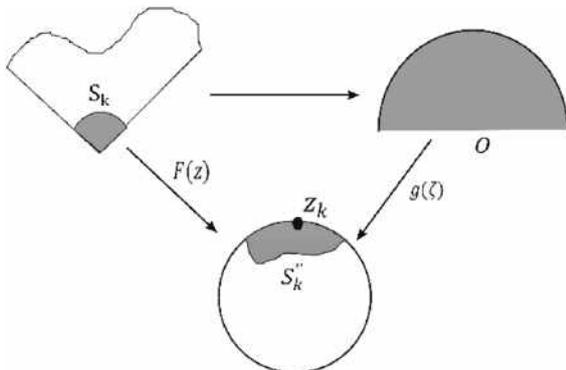


图 1 共性映射变换关系

那么 \$\omega = \omega\_k + \zeta^{\alpha\_k}\$ 的适当分支将 \$S'\_k\$ 映射为 \$S\_k\$。不妨令 \$g(\zeta) = F(\omega\_k + \zeta^{\alpha\_k})\$, 则该函数可将 \$S'\_k\$ 映射为 \$S\_k\$, 且 \$g(0) = \omega\_k\$。依对称原理, \$g(\zeta)\$ 能解析延拓到 \$S'\_k\$。延拓后的反函数记为 \$\zeta = G(z)\$, 在 \$z\_k\$ 的领域内有幂级数展开

$$\zeta = G(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (z - z_k)^i \quad (7)$$

\$L\_n\$ 的边界为直线段, 故 \$f(z)\$ 可以解析延拓到单位圆周上 (除 \$z\_k (k=1, 2, \dots, n)\$ 外)。在 \$S\_k\$ 内充分接近 \$\omega\_k\$ 处, 有

$$f(z) - \omega_k = \zeta^{\alpha_k} = (z - z_k)^{\alpha_k} \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i (z - z_k)^{i-1} \right)^{\alpha_k} \quad (8)$$

由于单叶性可得 \$a\_1 \neq 0\$, 那么 \$(\sum\_{i=0}^{\infty} a\_i (z - z\_k)^{i-1})^{\alpha\_k}\$ 在 \$z\_k\$ 处解析, 从而 \$f'(z)(z - z\_k)^{1-\alpha\_k}\$ 在 \$z\_k\$ 处解析且不为零, 从而乘积

$$m(z) = f'(z) \prod_{k=1}^n (z - z_k)^{1-\alpha_k} \quad (9)$$

在闭单位圆上是解析的且不为零。下面要说明 \$m(z)\$ 是常函数, 令 \$\psi\_k\$ 为 \$\omega\_k \omega\_{k+1}\$ 与 \$x\$ 轴的夹角, 其中 \$\omega\_k \omega\_{k+1}\$ 是 \$z\_k z\_{k+1}\$ 的像线段。令 \$\phi\_k\$ 为圆弧 \$z\_k z\_{k+1}\$ 与 \$x\$ 轴的夹角, 从而有 \$\phi\_k = \theta + \pi/2\$。根据解析函数的性质, 我们可得 \$\arg[f'(e^{i\theta})] = \psi\_k - \phi\_k\$, 利用欧拉公式及式 (9) 和 (5), 则在 \$z\_k z\_{k+1}\$ 上有

$$\arg[m(e^{i\theta})] = \left[ \psi_k - \psi_k + \sum_{k=1}^n (1 - \alpha_k) \frac{\theta + \theta_k - \pi}{2} \right] \pmod{2\pi} = -\theta + \sum_{k=1}^n (1 - \alpha_k) \theta / 2 + \Psi = \Psi \quad (10)$$

其中 \$\Psi = \psi\_k + \pi/2 + \sum\_{k=1}^n (1 - \alpha\_k) \theta\_k / 2\$ 为常数。\$m(z)\$ 在单位圆周上恒等于常数。依最大模原理, 可得 \$m(z) = a\$ (常数), 即 \$f'(z) = a \prod\_{k=1}^n (z - z\_k)^{\alpha\_k - 1}\$, 对其两边积分, 从而得到公式。

注: Schwarz-Christoffel 定理在实际应用中, 圆周上的点 \$z\_k (k=1, 2, \dots, n)\$ 不能随意取, 要依据多角区域的具体结构和其他条件来求解。

### 3 例题计算

**例 1** 无限大的弹性平面内有一个折线裂纹, 分支裂纹与主裂纹的夹角为 (如图 2), 求将折线裂纹的物理平面映射为平面上的单位圆外部的共性映射。

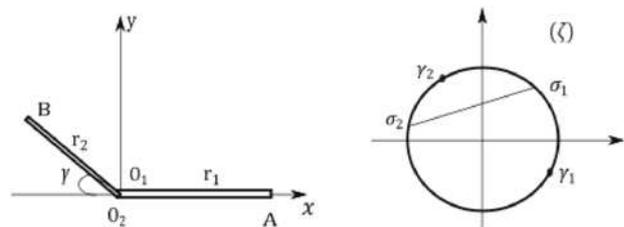


图 2 分支裂纹的物理平面和映射后的平面

解: 由 Riemann 映射定理, 把折线裂纹顶点  $A$ 、 $B$  及折点  $O_1$ 、 $O_2$  分别映射到  $\zeta$  平面上的  $r_1$ 、 $r_2$ 、 $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ , 则有 Schwarz-Christoffel 定理, 可得共性映射为:

$$\omega(\zeta) = \frac{A}{\zeta} (\zeta - \sigma_1)^{\lambda_1} (\zeta - \sigma_2)^{\lambda_2} \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 - \gamma/\pi, \lambda_2 = 1 + \gamma/\pi, \\ \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 &= 2\pi, \sigma_1 = e^{i\alpha_1}, \sigma_2 = e^{i\alpha_2} \\ \lambda_1 \cot \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2} + \lambda_2 \cot \frac{\alpha_2 - \beta_1}{2} &= 0, \\ \lambda_1 \cot \frac{\alpha_1 - \beta_2}{2} - \lambda_2 \cot \frac{\alpha_2 - \beta_2}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$r_1 = 4A \left( \sin \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2} \right)^{\lambda_1} \left( \sin \frac{\alpha_2 - \beta_1}{2} \right)^{\lambda_2},$$

$$r_2 = 4A \left( \sin \frac{\alpha_1 - \beta_2}{2} \right)^{\lambda_1} \left( \sin \frac{\alpha_2 - \beta_2}{2} \right)^{\lambda_2}$$

例2 将平面  $y \geq 0, -\infty < x < +\infty$  映射成以  $-K + iK'$ ,  $-K$ ,  $K$ ,  $K + iK'$  为顶点的矩形区域  $G$  的共形映射, 其中  $K, K'$  为正实数<sup>[2]</sup>.

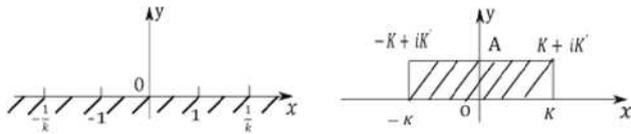


图3 上半平面的共性映射

解: 由 Schwarz-Christoffel 公式,  $F(z)$  可写为:

$$F(z) = a \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - 1)(1 - k^2 z^2)}} + a'$$

其中  $a$  和  $a'$  为待定常数.  $F(0) = 0$ , 则  $a' = 0$ . 由

各点的对应关系, 有

$$K = a \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}$$

$$K + iK' = a \int_0^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}$$

$a$  是正实数, 且

$$K' = \int_0^{1/k} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}$$

上式中

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}$$

是椭圆积分。

#### 4 结论

本文通过对多角型区域的共形映射问题讨论, 给出了 Schwarz-Christoffel 公式以及推广形式. 复变函数中共形映射可以解决很多其它领域中的问题, 例如零件的构造, 复杂裂纹问题, 流体力学及空气动力学等方面, 随着计算软件的不断更新, 共形映射理论的应用将越来越广泛。

#### 参考文献:

- [1] 钟玉泉. 复变函数论 (第五版). 高等教育出版社. 2021.
- [2] 郑建华. 复分析. 清华大学出版社. 北京: 2003.
- [3] 徐勇, 李景和, 张相梅. 复变函数与积分变换 [M]. 北京: 科学出版社. 2018.