

基于学习通线上线下混合式教学探讨

——以由参数方程所确定的函数的导数为例

豆铨煜 王励冰 李永凤

1. 郑州轻工业大学数学与信息科学学院, 中国·河南 郑州 450001;
2. 周口师范学院数学与统计学院, 中国·河南 周口 460001

【摘要】为了提高学生学习积极性和课堂参与性,本文以“由参数方程确定的函数的导数”为例,基于学习通开展线上线下混合式教学。主要实施方案是基于学习通的课前预习;课堂教学;习题测试;作业发布。通过教学实践和作业互评反馈,学生自主学习能力和学习效果得到明显提升。

【关键词】学习通;混合式教学;参数方程;导数

Discussion on Online and Offline Blended Teaching Based on Learning Pass

——Take the derivative of the function determined by the parametric equation as an example

Dou Quanyu, Wang Libing, Li Yongfeng

1. School of mathematics and statistics, Zhoukou Normal University, Zhoukou Henan 460001, China;
2. School of mathematics and Information Science, Zhengzhou University of Light Industry, Zhengzhou Henan, 450001, China.

[Abstract] In order to improve students learning enthusiasm and classroom participation, this paper takes "the derivative of the function determined by the parameter equation" as an example to carry out online and offline blended teaching based on 'XueXiTong' app. The main implementation steps are preview before class based on 'XueXiTong' app; Classroom teaching; Exercise test; Assignment publishing. Through teaching practice and homework mutual evaluation, students' autonomous learning ability and learning effect have been significantly improved.

[Keywords] 'XueXiTong' app; blended teaching; parametric equation; derivative

【基金项目】 郑州轻工业大学博士科研基金(13501050020); 郑州轻工业大学第十三批教改项目《《数学分析》课程思政与专业思政课程体系构建》。

1 教学背景

研究物体运动的轨迹时,常常用到参数方程。物体运动时,它的运动轨迹与时间有关。假设 x 和 y 分别是物体在铅直平面上位置的横坐标和纵坐标, t 是运动时间,那么物体的运动轨迹可以表示为 $x=f(t)$, $y=g(t)$ 。方程中的 t 相对于 x 和 y 来说就是参数,通过参数 t 建立起了 x 和 y 的关系。另外,研究曲线、曲面的形状、性质和作图时,例如:圆、椭圆、双曲线、摆线、圆柱、圆锥、求等,也经常用到参数方程。这些曲线如果不借助参数,得到的方程基本上都是高次方程,这样会增加后续研究难度。

2 教学实施

2.1 课前预习

教师提前录制教学视频,把视频和PPT课件利用学习通发放给学生,并设置成任务点以查看学生的预习进度。对于没有及时预习的学生,可以给予提醒。然后利用学习通的“分组任务”和“讨论”功能,把班级的学生分成3个小组,按小组学习和预习并自行推荐小组代表以便课堂教学探讨。发布讨论内容:什么是参数方程;参数方程的一阶导数如何求解;二阶导数如何求解等。

2.2 课堂教学

2.2.1 课前签到

上课前10分钟通过学习通发布二维码“签到”,设置二维码每10秒更换,避免学生之间代签。签到完成后开始进入正式的课堂教学。

2.2.2 引入思政元素

在课堂教学中引入课程思政能够促进高校的思想政治教育工作,有利于提高大学生思想政治修养、人文素质和创新精神等。由参数方程所确定的函数的导数可以用于求解抛射体的运动问题,

抛射体可以是我们的生活中经常见到的石头、学生们儿时玩耍用的弹弓的弹头、奥运会上射箭比赛的弓箭、投掷的棒球等。也可以是各种高精尖武器。

2.2.3 课堂讨论环节

由每个小组代表陈述各个小组的预习情况并阐述知识点,根据学生们的阐述,发现学生们能很好地完成预习,并积极查阅资料,对各个知识点有一些自己的理解。

2.2.3.1 由由参数方程确定的函数的导数。第一小组学生讲述了由参数方程所确定的函数的一阶导数。参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (1)$$

了确定 y 与 x 间的函数关系。若能够从(1)式中消去参数 t ,如果得到的是显函数,可以直接求解其导数;如果得到的是隐函数,可以利用前面隐函数求导方法求解其导数。当消去参数有困难时,我们需要找到一种不借助消去参数而能够直接求出参数方程所

确定的导数的方法来。在(1)式中,如果函数 $x = \varphi(t)$ 具有单调连

续反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$,且此反函数能与函数 $y = \psi(t)$ 构成复合

函数,那么由参数方程所确定的函数可以看成是由 $y = \psi(t)$ 和

$t = \varphi^{-1}(x)$ 复合而成的函数 $y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$ 。于是可以根据复合函数的求导运算法则得到由参数方程所确定的函数的导数公式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$$

课本在一阶导数的基础上,利用复合函数和反函数的求导法则直接给出了由参数方程(1)所确定的 x 的函数的二阶导数公式。根据学生们反馈,理解起来有些困难。不过,第二小组学生们给出了更容易的理解方案把上面得到的一阶导数公式放到和(1)式中关于 y 的参数方程同等的地位,这里把一阶导函数记作函数 g ,所以根据一阶导数的计算公式,二阶导数的计算公式等于 g 关于 t 的导数比上 x 关于 t 的导数。我们可以先求 g 关于 t 的一阶导数,把 g 关于 t 的函数直接带入,这样就变成一个关于 t 的函数直接对 t 进行求导,这不过此时的函数是以分式的形式给出的,利用两个函数的商的求导法则可以求出其导数,这样学生能更容易理解。具体公式如下:

$$\begin{cases} x = \phi(t), \\ g = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}, \end{cases} \Rightarrow \frac{dg}{dt} = d\left(\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}\right) / dt = \frac{\psi''(t)\phi'(t) - \psi'(t)\phi''(t)}{\phi'^2(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dg/dt}{dx/dt} = \frac{dg/dt}{\phi'(t)} = \frac{\psi''(t)\phi'(t) - \psi'(t)\phi''(t)}{\phi'^3(t)},$$

使用此种方式得到公式和书上的公式完全一样。至此把由参数方程所确定的函数的一阶和二阶导数公式讲解结束。为了验证同学们的预习和课堂听讲效果,接下来借助学习通的“选人”功能,让学生讲解题目。先由学生讲解,然后教师补充总结。

例1 2021年8月1日,在2020年东京奥运会田径女子铅球决赛中,巩立娇投出20米58的个人最好成绩夺得冠军。这是中国田径队在东京奥运会上的第一枚金牌,也是中国田径史上首枚田赛项目奥运金牌。铅球在空中飞行时,若不计空气阻力,只受重力作用,它的运动轨迹的参数方程可以表示为

$$\begin{cases} x = v_0 t, \\ y = v_1 t - \frac{1}{2} g t^2, \end{cases}$$

求铅球在 $t=0$ 时刻的运动速度的大小和以及在什么时刻达到最高点?

学生5讲解该例题。铅球的运动速度有水平和铅直两个分量,而速度是位移对时间的导数。所以铅球运动速度大小等于

$$v = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{v_0^2 + (v_1 - gt)^2}$$

$$\text{把 } t=0 \text{ 代入,得此刻速度大小 } v = \sqrt{v_0^2 + v_1^2}.$$

下面求速度的方向,而速度方向就是运动轨迹的切线方向。设 α 是切线的倾斜角,则切线方向为

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{v_1 - gt}{v_0}$$

把 $t=0$ 代入,得此刻速度方向为 v_1/v_0

当铅球达到最高点时,水平方向的速度不等于0,铅直方向

的速度等于0,铅直方向的速度分量是 $\frac{dy}{dt} = v_1 - gt$,由此可

以推出在 $t = v_1/g$ 时刻达到最高点。

2.2.3.2 相关变化率。相关变化率是参数方程所确定的函数的导数的一个直接应用,由第3小组代表通过例题讲解该部分内容。

例2 溶液自深18cm顶直径12cm的正圆锥形漏斗中漏入一直径为10cm的圆柱形筒中。开始时漏斗中盛满了溶液。已知当溶液在漏斗中深为12cm时,其表面下降的速率为1cm/min。问此时圆柱形筒中溶液表面上升的速率为多少?

此题的解题步骤是:假设在 t 时刻正圆锥形漏斗的溶液高度为 h ,截面半径为 r ,圆柱形筒的高度为 H ,则 h 和 H 均是关于时间 t 的函数,由体积建立关系式

$$\frac{1}{3} \pi \cdot 6^2 \cdot 18 - \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 5^2 \cdot H.$$

另外,根据圆锥自身的比例关系得 $\frac{r}{6} = \frac{h}{18} \Rightarrow r = \frac{h}{3}$,代

入上式得 h 和 H 的关系式

$$216 - \frac{1}{27} h^3 = 25H. \quad (7)$$

(7)式两端分别对 t 求导,得 $-\frac{1}{9} h^2 \frac{dh}{dt} = 25 \frac{dH}{dt}$.

把 $h=12, \frac{dh}{dt} = 1\text{cm/min}$ 代入上式,得此时溶液上升

的速率为 $\frac{dH}{dt} = \frac{16}{25} \text{cm/min}$.

3 课后复习

基本知识点通过线上线下讲解完后进入课后复习阶段。这个阶段主要是利用学习通发布习题测试和作业,试题通过学习通的“考试”功能发布,作业发放时设置“作业互评”。从学生提交的试题和作业互评的结果看出学生较好地掌握该小节知识,但是有几个别学生还需加强知识点的学习,同时利用“教学预警”功能再次提醒知识点掌握不太好的学生努力学习,不会的地方及时与教师沟通,争取学会每一个知识点。

4 结语

本文以由参数方程所确定的函数的导数为例基于学习通探讨线上线下混合式教学,从课堂教学反馈出学生对该节知识点做了深入细致的学习和思考,从习题测试和作业互评结果看出此线上线下教学模式取得了非常好的效果。

参考文献:

[1] 高等数学(第七版)[M],同济大学数学系编,高等教育出版社,2014.

[2] 李晓东,周洪双.“两弹城”:见证伟大功勋,传承“两弹一星”精神[J].光明日报,2019(03).

[3] 新中国峥嵘岁月 | “两弹一星”建勋[J].新华网,2019年9月25日.