Educational Teaching,教育教学,(6)2024,3
ISSN:2705-0912(Print);2705-0866(Online)

极限思想在高中数学解题中的应用

艾江波

抚州市临川中阳一中，中国·江西　抚州　344100

【摘　要】在数学学习中，极限思想一种重要的思想方法和思维方式.它与微积分关系紧密，是大学阶段数学分析课程中的基础思想和重要组成部分.文章主要研究的内容是极限思想在高中数学解题中的应用，具体从以下三个部分进行阐述：首先，从高中数学课程标准出发，介绍极限思想的研究背景及其研究意义；其次，介绍了极限的概念以及极限思想的萌芽和发展过程，并列举出了两个常见的极限思想方法；最后，重点探讨了极限思想在高中数学解题中的具体运用，具体从数列、函数、不等式、立体几何以及解析几何五个方面展开论述，并结合一些具体的例题，将极限思想方法与传统的解题方法相比较，感受极限思想在数学解题过程中的运用和渗透。

【关键词】极限思想；高中数学；应用

1　引言

1.1极限思想的研究背景

不论是在中小学教育还是高等教育中，数学思想方法一直都是教育工作者所关注的重点话题.在《全日制普通高级中学数学教学大纲》中，对教学目标有明确规定：“在高中数学教学阶段要在义务教育的基础上，使学生学好代数、几何、概率统计以及微积分的基础知识与基本技能，同时还要掌握其中蕴含的数学思想方法，为以后从事社会主义现代化建设和进一步学习做准备”[1]。作为近现代数学中的重要数学思想，极限思想有着极其广泛的应用，在中小学数学教育中具有重要的意义和价值.对于极限思想，早在我们学习自然数时就已经接触到了，在到之后初中学习的数轴，有理数，无理数之中都渗透着极限的思想.例如我们在学习有理数和无理数时，了解到每两个数之间有无穷个数；在学习圆的时候了解到运用割圆法求圆的面积公式等等。

1.2极限思想的研究意义

极限思想一直贯穿在数学学科之中，在数学研究中非常重要.极限思想是运用极限的概念让我们从有限到无限，从对常量的研究转换成对变量的研究，从近似认识精确的过程中分析和解决问题的一种数学思想方法，本质上是特殊执法的延伸与拓展[2]。运用极限思想解决问题时，首先要确定一个与我们要研究的未知量有关的变量，然后在一个无限的过程中检查由这个变量产生的最终结果是所需的未知量，最后将极限应用于相应的计算来得到这个结果，从而解决我们要研究的未知量的问题。

2　极限的概念与极限思想

极限是近代数学中一个重要的概念。从广义上来讲，极限就是不断靠近却不能达到的一种状态.而在数学中，极限是指某个变量无限趋近于某一个固定的数值，它是对某种变化状态的描述.极限理论在微积分中处于核心地位，是数学分析的理论基础，在近现代数学中有着广泛的应用.本文所探讨的极限思想的运用与极限的概念息息相关.极限主要分为两大类，一类是数列极限，另一类是函数极限，在大学《数学分析》教材中，分别对数列极限和函数极限给出了严格的定义。

对数列极限的定义如下：

定义1　　对于数列$\left\{a_n\right\}$，存在常数a，对任意给的$\varepsilon>0$，总存在正整数N，使得当$n>N$时，满足不等式$\left|a_n-a\right|<\varepsilon$，则称常数$a$是数列$\left\{a_n\right\}$的极限，记作$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$。

关于函数极限有两种定义，一种是对x趋近于∞时函数极限的定义，一种是对x趋近于x_0时函数极限的定义.对两种函数极限的定义如下：

定义2　　对于在区间$\left[a,+\infty\right)$上有意义的函数$f\left(x\right)$，存在常数A，对任意给的$\varepsilon>0$，总存在正数M，使得当$x>M$时，满足不等式$\left|f\left(x\right)-A\right|<\varepsilon$，则称常数$A$是函数$f\left(x\right)$在$x$趋近于$+\infty$时的极限，记作$\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=A$。

根据上述对x趋近于$+\infty$时函数极限的定义，可以类比得出x趋近于$-\infty$时和x趋近于∞时函数极限的定义，只需更改部分条件和结论即可.

除了以上的极限定义之外，还有关于单侧极限的定义，即函数的左右极限，该定义可以通过类比定义3得出，在此就不再详细赘述。

3　极限思想在高中数学解题中的具体应用

在近现代数学以及其他学科中，极限思想具有极其广泛的应用.通常情况下，人们所了解的极限思想方法仅仅是

在求解极值和证明极限是否存在等问题上的一些应用，谈及极限都认为在大学数学中才会接触到，并不熟悉和了解极限思想在解决高中数学问题和实际生活问题中的应用.其实，若可以灵活地运用极限思想在解决问题的过程中，不仅仅可以降低解题难度，将复杂问题简单化，同时还可以培养学生的数学思维和提升数学核心素养能力.为了进一步理解极限思想的概念和作用，下面本文将从数列、函数、不等式、立体几何以及解析几何五个方面，通过具体实例，体会极限思想在高中数学解题中的重要作用。

3.1极限思想在数列问题中的应用

数列在高中数学中有着十分重要的地位，它是现行高中教材中的必修知识.在一些数列问题的运算中，让人觉得无处下手，而这时极限思想方法就为此提供一些做题思路。

已知数列 $\{a_n\}$，其中 $c_n=2^n+3^n$ 且数列 $\{c_{n+1}-pc_n\}$ 为一个等比数列，求常数 p 的值。

（运用等比数列的性质）：

解　因为 $\{c_{n+1}-pc_n\}$ 为等比数列，根据等比数列的性质可列出方程

$$\left(c_{n+1}-pc_n\right)^2=\left(c_{n+2}-pc_{n+1}\right)\left(c_n-pc_{n-1}\right),$$

把 $c_n=2^n+3^n$ 代入上式，得到方程

$$\left[2^{n+1}+3^{n+1}-p(2^n+3^n)\right]^2$$
$$=\left[2^{n+2}+3^{n+2}-p\left(2^{n+1}+3^{n+1}\right)\right]\left[2^n+3^n-p\left(2^{n-1}+3^{n-1}\right)\right],$$

整理上述方程可得

$$\frac{1}{6}(2-p)(3-p)\cdot 2^n\cdot 3^n=0,$$

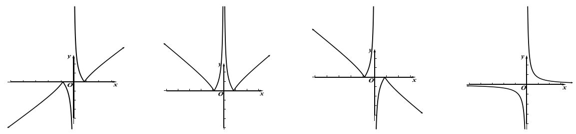
解该方程得到 $p=2$ 或 $p=3$.

3.2极限思想在函数问题中的应用

函数作为高中阶段数学学科中非常重要的知识点，几乎贯穿了整个高中数学体系.在中学数学教学过程中，它所蕴含的数学思想是一个重要的方面，极限思想就包含在其中.在某些函数问题中，运用极限思想方法可以使某些复杂的计算过程得到简化，例如确定函数的图像、求解函数的定义域和值域、解决关于函数零点的问题以及求解未知变量的取值范围等等。

函数图像在解决函数问题时起到很重要的作用，运用函数图像可以直观的了解到函数的一些性质。对于一些复杂的函数，确定其函数图像需要进行大量的计算来找点的位置，这时可以运用极限思想方法判断极端状态，来确定函数图像的大致走向。

（2022年高考天津卷3）函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\left|x^2-1\right|}{x}$ 的图像为（　　）。



A　　B　　C　　D

分析：一般确定函数图像主要从函数的奇偶性和单调性，代入特殊数值，运用极限思想判断极端状态这三方面入手。该函数不是常见的初等函数，确定该函数的图像大部分同学会采用代特定值的方法，通过判断结果的正负来排除选项，但这种办法不能分辨出 A，D 两个选项.这时可以运用极限思想，函数的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，当 $x\to+\infty$ 时，$f\left(x\right)$ 此时趋于 $+\infty$，此时便可以排除，C，D 两个选项.A，B 两个选项通过观察图像特点，可以通过判断函数的奇偶性，选出最终答案.根据函数奇偶性的定义，可以得出 $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$，所以函数为奇函数，因此正确答案是 A 选项。

通过上述可以看出极限思想具有十分广泛的应用价值.在运用极限思想解决某一问题时，要考虑该问题是否具有某一变量或者运动变化等特点，这是使用极限思想方法的前提，可见极限思想并不是万能的，它不能解决所有的数学问题，具有特定的条件.通过上述实例的分析，将极限思想解题方法与常规解题方法进行比较，可以发现利用极限思想方法来解决问题，可以将解题过程简化，从而避开某些复杂的计算，让解题过程变得更为明晰，在解决客观题时，运用极限思想方法，可以快速从选项中排除错误选项，得出正确结果，节省了大量时间，而且有利于培养学生的创新能力和实践能力，同时也能提高中学生的数学核心素养。

4　结论

文章主要介绍了极限的概念与极限思想的产生和发展背景，对极限思想在高中数学解题过程中的应用做出具体阐述。所谓极限思想就是运用极限的概念让我们从有限到无限，从对常量的研究转换成对变量的研究，从近似认识精确的过程中分析和解决问题的一种数学思想方法，本质上是特殊执法的延伸与拓展。引导学生使用极限思想解题，有助于培养学生的发散思维能力，开拓学生的数学视野，提升学生的数学核心素养。对极限思想深刻了解和认识可以为未来大学学习高等数学课程奠定一定的知识基础。

参考文献：

[1]窦涵,韩旸.极限思想在中学数学中的应用[J].文渊(高中版),2020(10):189.

[2]方志平.例析极限思想在解析几何中的妙用[J].数学教学通讯,2017(06):77-78.

作者简介：艾江波（1999.4-），男，汉族，江西抚州人，学士学历，中小学二级，就职于抚州市临川中阳一中，研究方向：应用数学。