数字时代下指向核心素养的教学研究

夏　芳

上海市第四中学，中国·上海　200234

【摘　要】在人工智能兴起的今天，数字发展对教学也产生了深远的影响，在课堂教学中利用技术调动学生的积极性，以学生作为学习的主体，激发其主动学习兴趣。本论文通过介绍切线的定义并了解其演变过程，探索导数的几何意义及切线的斜率，以及会求切线方程，认识导数的驻点。通过对切线概念的建立与辨析，以问题探究方式引起学生学习的探索兴趣，引导学生学会观察问题、归纳方法,领会数学思想方法。通过本论文的研究，有助于帮助学生进一步理解导数的定义，渗透数形结合、以直代曲的思想方法。

【关键词】函数图形；几何意义；切线；割线；教与学

引言

如今是信息发达，新知识迭代层出不穷的社会，为了学生适应未来社会的需求，学校课堂教学不能仅限于专业化知识的传授，同时要在课堂中培养学生良好品格和核心能力，这样学生才能在生活中以不变应万变，适应不断变动的未来。

根据新课程标准理念，学生是学习知识的智能主体，而老师是学生的建议者、帮助者、引导者，从知识层面看，学生学习了第一节的平均变化率，函数的瞬时变化率及导数的概念，对导数概念有初步的认识，同时学生对曲线的切线也基本的认识，从学习能力层面看，通过高一的学习与实践，学生有基本探究问题的能力和经验．但更多限于直线与曲线相切则直线与曲线只有一个公共点的理解上。

本节课中曲线的切线概念不是从公共点上定义的，而是由“割线”的“逼近”来定义，层次有所上升，把曲线的切线上升到新的思维水平上。

1　教学目的、重难点及方法

1.1　教学目的

①通过动态图象展示帮助学生直观地理解导数的几何意义，即切线的斜率，培养学生的直观想象核心素养；

②会求函数图象的切线方程。学习并掌握“数形结合、以直代曲”数学思想方法，培养学生的数学抽象核心素养和逻辑推理核心素养；

③在课堂中渗透“无限逼近”，利用数学软件的动图激发学生的热情和兴趣，在利用数字技术在课堂教学中培养学生探索新知识的精神和数学素养。

1.2　教学重难点

重点：导数的几何意义及其应用，“以直代曲”、“数形结合”的数学思想。

难点：①通过直观动图理解导数的几何意义；利用推导过程渗透极限思想；②运用导数的几何意义解释曲线的切线并能阐述实际意义和解决实际问题。

1.3　教学方法

启发式、讲练结合法

2　教学过程研究

2.1　旧知复习、情景引入

在变速运动中，x在x0,x0＋h为端点的区间内的平均速度为 x的变化量为h，y的变化量为f(x0＋h)－f(x0).即为速度的平均变化率。

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$$

在变速运动中，当h趋于0时，平均速度的极限值为$x=x_0$处的瞬时速度，即瞬时变化率,其意义为函数y=f(x)在$x=x_0$处的导数。

ppt课件显示日常生活中投篮照片，展示随处可见的桥的图片，提问学生如何用数学知识来反映篮球瞬时速度？如何用数学知识来反映桥的坡度？

设计意图：

这些问题的数学本质都是求曲线的切线，①回顾复习，为本节做知识准备；②紧扣导数的本质设置情景问题，顺利自然引入新授内容。

2.2　探究活动、构建新知

数学中，某区间内平均变化率的极限是某点的瞬时变化率；在变速运动中，某时间段内平均速度的极限是某时刻的瞬时速度。类似地，几何图形中，曲线上过点的割线的极限是什么？曲线的割线与切线有什么关系？先认识曲线中割线的定义。

割线：连接曲线上任意两点的直线称为该曲线的一条割线。如图1所示：

Educational Teaching,教育教学,(6)2024,6
ISSN:2705-0912(Print);2705-0866(Online)

图 1 割线示意图

问题1：我们已经学习过哪些曲线中的切线？

圆、椭圆、双曲线和抛物线的切线，如图2所示：

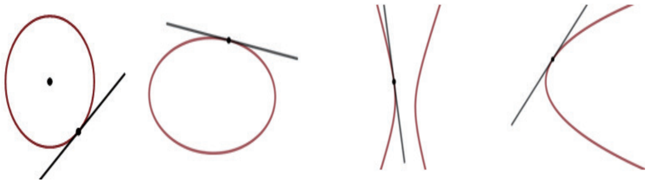

图 2 相关切线

可以看到，上面情况中直线都是曲线的的切线，前面旧知中学习的切线的定义无法涵盖任意曲线的切线，因此本节课将在前面的基础上扩充切线的知识，学习切线的另一种定义。

问题2：怎样的切线定义才更合适呢？

利用信息技术展示动态图，观察中国古代数学家刘徽的割圆术动态图，如图引导学生发现规律、特征，得到结论。

特征：不断细化分割圆，正多边形无限接近圆，割线无限接近切线，直线线无限接近曲线，“以直代曲”，故结论是：割线的极限是切线。

切线定义：点Q越来越靠近点P时，PQ趋近于曲线的一条确定直线，称之为曲线在点P处的切线。

结合课本引例，通过问题串的形式，引导学生在平均变化率、瞬时变化率、导数、割线、切线、斜率等已有知识的基础上探究发现他们之间的联系，体会无限逼近的思想，数形对照的过程中自然地形成对新知的构建。

设计意图：

①通过完整的探究环节、生生互动、师生共析、数形结合，使学生从直观感受上升到理性思考，抽象概括出导数的几何意义，数学知识的产生水到渠成；

②利用重构式教学方法，自然地将“切线的演变历程”融入课堂，使学生深刻感受到对事物本质的探索是一个渐渐深入、存真去伪的过程；

③引用中国古代数学家刘徽的《割圆术》视频展示无限接近，深刻感受“以直代曲”的同时加强学生的文化自信和认同感。

探索切线与导数的关系

问题3：如何求切线的斜率？那我们怎样用数学语言描述这一极限呢？

2.3　例题分析，巩固基础

例3　如图3所示，曲线 $y=\sqrt{2-x^2}(-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2})$ 是圆 $x^2+y^2=2$ 在x轴及其上方的部分，P(1,1)和Q(0,$\sqrt{2}$)是该曲线上的两点。

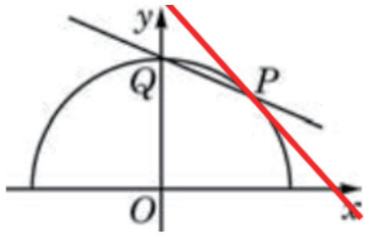

图 3 6 P点变化示意图

(1)求割线PQ的斜率；

(2)对正整数n，令 $x_n=1-\dfrac{1}{n},y_n=\sqrt{2-{x_n}^2},Q_n(x_n,y_n)$，均在该圆周上，且随着n的增大越来越接近点P.借助信息技术工具，适当地计算一些割线PQn的斜率，观察并总结当n逐渐增大时，割线PQn的斜率的变化趋势。

解：(1)利用斜率公式得到

$$k_{PQ_n}=\frac{y_Q-y_p}{x_Q-x_p}=\frac{\sqrt{2}-1}{0-1}=1-\sqrt{2}$$

割线PQn的斜率是：

$$k_{PQ_n}=\frac{y_Q-y_p}{x_Q-x_p}=\frac{y_{Q_n}-y_p}{x_n-x_p}=n(1-\sqrt{2-(1-\frac{1}{n})^2})$$

引导学生利用计算机中的表格计算，得到随着n不断变大，割线不断接近在P处的切线，其斜率不断接近-1，则在P处切线的斜率值为-1.即过P点的切线斜率可表示为：

$$\lim_{x_{Q_n}\to x_p}k_{PQ_n}=\lim_{x_{Q_n}\to x_p}\frac{y_{Q_n}-y_p}{x_{Q_n}-x_p}=-1$$

切线的斜率与导数什么关系？

进一步观察其结构特征，找到切线的斜率与导数间的关系，不难发现：

令$h=x_{Q_n}-x_p,f(x)=\sqrt{2-x^2}$

$$\lim_{x_{Q_n}\to x_p}\frac{y_{Q_n}-y_p}{x_{Q_n}-x_p}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_{Q_n})-f(x_p)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_p+h)-f(x_p)}{h}=f'(x_p)$$

不难猜想：导数y=f’(x_p)的几何意义：x=x_p处的切线的斜率，且切点为(x_p,f(x_p))。

从例3猜想的结论出发，经过严谨的证明，得出更一

般的结论，在PPT中展示一般曲线中，割线趋近于切线的过程，其斜率的变化直观展示给学生看，验证导数的几何意义。

设计意图：

例3主要是为了带领学生探究性学习割线的斜率和切线的斜率，一方面验证割线的极限是切线，与之对应的割线斜率的极限就是切线斜率。另一方面，引导学生观察斜线斜率的代数结构，鼓励学生自主探究，猜想结论，落实数学学科在课堂中中的数学抽象素养和逻辑推理素养的培养，同时也能不断增强学生的学习兴趣。

2.4　课堂练习，深化例题

2.4.1　请根据图4中的函数图像，将下列数值按从小到大的顺序排列

①曲线在点A处切线的斜率；②曲线在点B处切线的斜率；③曲线在点C处切线的斜率；④割线AB的斜率；⑤数值0；⑥数值1。

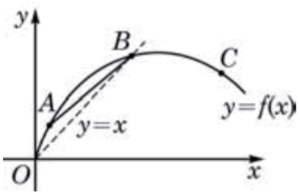

图 4 习题一图

2.4.2　借助函数图像，判断下列导数的正负（可以用信息技术工具）

(1) $f'(\frac{\pi}{4})$,其中$f(x)=\sin x$；(2) $f'(0)$,其中$f(x)=(\frac{1}{2})^x$

设计意图：

练一练的两个题目主要是检验学生对导数的几何意义的理解，同时也帮助学生巩固导数几何应用，培养学生的几何直观素养。

如何求切线方程？

导数y=f’（x_0）为x=x_0处的切线的斜率，切线过点根据点（x_0, y_0），则由点斜式可知切线方程为：

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

例4、已知f(x)=x2,求曲线f(x)在点p(1,1)处的切线方程。

例5、已知f(x)=x3,求曲线f(x)在点p(0,0)处的切线方程。

驻点：导数为0的点横坐标值为函数的驻点

设计意图：

例4帮助学生掌握求曲线斜率切线的斜率及切线方程的方法与过程；

例5，强化利用导数的几何意义来求切线斜率和切线方程，以及引出新知---驻点的概念，区别例4与例5中的驻点的区别为后面知识的学习做铺垫。

2.5　课堂小结

①切线定义的变化（其中包含极限思想，定义从静态变为动态）；

②导数的几何意义是该点的切线斜率（包含“以直代曲”的思想，数形结合的思想）；

③如何求曲线上某点的切线方程。

3　结语

本节课的主要教学内容是学习切线的定义了解其演变过程，探索导数的几何意义及切线的斜率，以及会求切线方程，认识导数的驻点。在本节课中可能会出现的情况是切线定义的变化，从静态到动态的理解是有难度的，对与某处的导数值的几何意义是切线的斜率是从定义角度出发帮助学生理解，便于掌握。

本节课也是不断探析高中数学课堂教学如何落实学科核心素养的求索过程，数学核心素养的在课堂中的落实与强化需要教师在数学的教学过程中提炼总结出来，用数学思维方式来分析人生面对的问题的核心素养和能力。

参考文献：

[1]王尚志,吕世虎,胡凤娟.普通高中课程标准(2017年版2020年修订)教师指导.数学[M].上海教育出版社,2020.

[2]林磊.关于上海高中数学新版教材导数内容的讨论[J].数学教学,2023(9):39-41.

[3]中华人民共和国教育部制订.普通高中数学课程标准:实验[M].人民教育出版社,2003.

[4]孔庆邮.在必修课中渗透研究性学习的一些探索与体会——上海高中数学新教材试验中的探索与尝试[J].数学教学研究,2003(11):3.

[5]张雅婷.数字时代中小学教师项目教学胜任力模型构建研究[D].曲阜师范大学,2023.

[6]钮春夏.基于核心素养的小学数学生活化教学策略研究[J].情感读本,2023(08):104-105.

[7]林丽征.数字时代高中信息技术的高效课堂教学模式研究[J].学苑教育,2023,09(12):37-38.