WOD随机变量序列收敛性

张奥楠

安徽新华学院，中国·安徽 合肥 230000

【摘 要】利用WOD随机变量截断法，以及概率不等式，得到WOD随机变量序列的完全收敛性。

【关键词】 WOD随机变量; 完全矩收敛; 大数定律

【基金项目】本文系安徽省质量工程重点项目（2022jyxm673）; 安徽新华学院科研项目（2022zr017）成果。

1 引言

2013年Wang等在研究金融风险模型时提出了一类名为WOD的新的相依型随机变量序列，其定义如下：

定义1.1 若任意有限实数序列$\{g_U(n), n\geq 1\}$满足对任意$n\geq 1$，$x_1, x_2, \cdots x_n \in R$，均有

$$P(X_1 > x_1, X_2 > x_2, \cdots X_n > x_n) \leq g_U(n)\prod_{i=1}^{n} P(X_i > x_i)$$

则称随机变量序列$\{X_n, n\geq 1\}$是宽上限相依的（WUOD）.

若任意有限实数序列$\{g_U(n), n\geq 1\}$满足对任意$n\geq 1$，$x_1, x_2, \cdots x_n \in R$，均有

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \cdots X_n \leq x_n) \leq g_L(n)\prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x_i)$$

则随机变量序列$\{X_n, n\geq 1\}$是宽下限相依的（WLOD）. 如果随机变量$\{X_n, n\geq 1\}$既是WUOD的，也是WLOD的，则称$\{X_n, n\geq 1\}$为WOD随机变量序列，其中$\{g_U(n), g_L(n), n\geq 1\}$为控制系数. 若对任意的$n\geq 1$，$\{X_{ni}, n\geq 1\}$是WOD随机变量序列，则$\{X_{ni}, n\geq 1, i\geq 1\}$是WOD随机变量阵列.

WOD随机变量是一类较为宽泛的变量序列，随着控制系数取不同值，可以得END随机变量序列（$g_U(n)=g_L(n)=M$，M为固定值）、NOD随机变量序列（$g_U(n)=g_L(n)=1$）

本文在已有文献基础上，利用WOD随机变量截尾技术，结合矩不等式以及采随机变量随机控制法，得到WOD随机变量阵列的完全矩收敛结论，推广了定理1.2的相关结论.

在本文证明中，将用到随机控制法，其定义如下：

定义1.3随机变量序列$\{X_n, n\geq 1\}$，存在正常数C及随机变量X，若对任意的$x\geq 0, n\geq 1$，使得$P(|X_n|\geq x)\leq CP(|X|\geq x)$，则称$\{X_n, n\geq 1\}$被随机变量$X$随机控制.

2 相关结论及引理

现给出本文WOD随机变量阵列完全矩收敛结论.

定理2.1设$\alpha > \dfrac{1}{2}, \alpha p > 1, p\geq 2$. $\{X_n, n\geq 1\}$是WOD随机变量序列，$\sum_{i=1}^{n}|a_{ni}|^q = O(n^\beta)$，$E|X|^p \log^q(1+|X|) < \infty$且$q > \max\left\{p, \dfrac{\alpha p-1}{\alpha - 1/2}\right\}$. 对任意的$\varepsilon > 0$，

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-\alpha-\beta-1} E\left(\max_{1\leq k\leq n}\left|\sum_{i=1}^{k} a_{nk}X_i\right| - \varepsilon(1+g(n))^{\frac{1}{q-1}} n\alpha\right)_+ < \infty \tag{2.1}$$

为证明（2.1）成立，需用到以下引理.

引理2.2 $\{X_n, n\geq 1\}$是WOD随机变量序列，若$\{f_n(.), n\geq 1\}$是均非降（均非升）函数，则$\{f_n(X_n), n\geq 1\}$仍然是WOD随机变量序列.

引理2.3引理$\{X_n, n\geq 1\}$是WOD随机变量序列且$EX_n = 0$，则

$1\leq q\leq 2$时，

$$E\left(\max_{1\leq k\leq n}|\sum_{i=1}^{k} a_{ni}X_i|^q\right) \leq \left(C_1(q) + C_2(q)g(n)\right)\log^q n\sum_{i=1}^{n} E|a_{ni}X_i|^q$$

$q > 2$时，

$$E\left(\max_{1\leq k\leq n}|\sum_{i=1}^{k} a_{ni}X_i|^q\right) \leq C_1(q)\log^q n\sum_{i=1}^{n} E|a_{ni}X_i|^q$$

$$+C_2(q)g(n)\log^q n\left(\sum_{i=1}^{n} E|a_{ni}X_i|^2\right)^{\frac{q}{2}}$$

成立，其中 $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i,\ n\ge 1$.

引理2.4 $\{X_n,n\ge 1\}$ 是被随机变量 X 随机控制的随机变量序列，则对任意的 $n\ge 1$ 及 $x>0$，有

$$E|X_n|^q I(|X_n|\le x)\le C(E|X|^q I(|X|\le x)+x^q P(|X|>x))$$

$$E|X_n|^q I(|X_n|>x)\le C(E|X|^q I(|X|>x)).$$

3 主要结果证明

定理2.1证明 记 $X_{ni}=-n^\alpha I(X_i<-n^\alpha)+X_i I(|X|_i\le n^\alpha)+n^\alpha I(X_i>n^\alpha)$，不失一般性，设 $0<\varepsilon<\delta$，对任意的 $\varepsilon>0$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-\alpha-\beta-1}E\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k}a_{nk}X_i\right|-\varepsilon(1+g(n))^{\frac{1}{q-1}}n\alpha\right)_+<\infty$$

$$=C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-\alpha-\beta-1}\frac{1}{1+g(n)}E\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k}a_{nk}\tilde{X}_{ni}\right|^q\right)+C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-\alpha-\beta-1}E\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k}a_{nk}X_{ni}^*\right|\right)$$

$$+\quad C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-\alpha-\beta-1}E\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k}E(a_{nk}X_{ni})\right|\right)$$

$$=C(H_1+H_2+H_3).$$

对于任意 $n\ge 1$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-\alpha-\beta-1}\frac{1}{1+g(n)}E\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k}a_{nk}\tilde{X}_{ni}\right|^q\right)$$

$$\le C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-\alpha-\beta-1}\log^q n\sum_{n=1}^{\infty}E|a_{nk}\tilde{X}_{ni}|^q+\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-\alpha-\beta-1}\log^q n\left(\sum_{n=1}^{\infty}E|a_{nk}\tilde{X}_{ni}|^2\right)^{\frac{q}{2}}$$

$$=C(H_{11}+H_{12}).$$

为证明 $H_{11}<\infty$，根据 $E|X|^p\log^q(1+|X|)<\infty$ 知，由引理可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-\alpha-\beta-1}\log^q n\sum_{n=1}^{\infty}E|a_{nk}\tilde{X}_{ni}|^q<\infty.$$

下证 $H_{12}<\infty$，由 C_r 不等式可以知道

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ni}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ni}^q\right)^{\frac{1}{q}}\le Cn^{\frac{q}{w}+\beta-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-\alpha-\beta-1}\log^q n\left(\sum_{n=1}^{\infty}E|a_{nk}\tilde{X}_{ni}|^2\right)^{\frac{q}{2}}\le C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-\alpha q+\frac{q}{2}-2}\log^q n(EX^2)^{\frac{q}{2}}<\infty$$

最后证明 $H_2<\infty,H_3<\infty$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-\alpha-\beta-1}E\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k}a_{nk}X_{ni}^*\right|\right)\le C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-\alpha-\beta-1}E|X|I(|X|>n^\alpha)$$

$$\le C\sum_{m=1}^{\infty}E|X|I(m^\alpha<|X|<(m+1)^\alpha)\sum_{n=1}^{m}n^{\alpha p-\alpha-1}$$

$$\le CE|X|^p<\infty.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-\alpha-\beta-1}E\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k}E(a_{nk}X_{ni})\right|\right)\le C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-\alpha-\beta-1}\sum_{i=1}^{n}|a_{ni}|E|X_i|I(|X_i|>n^\alpha)$$

$$<\infty$$

综上2.1证明完毕.

参考文献：

[1] Wang K Y, Wang Y B, Gao Q W. Uniform asymptotics for the finite-time ruin probability of a new dependent risk model with a constant interest rate[J]. Methodology and Computing in Applied Probability. 2013,15:109-124.

[2]蔡光辉,项琳,章茜. WOD随机变量序列加权和的完全收敛性[J].高校应用数学学报(A辑),2020,35:8.

[3]王巍,吴青青,唐徐飞. WOD随机变量的核密度估计[J].中国科学技术大学学报.2022,2:52.

[4]林君洁,邓新,鲍潇涵,王学军.非负WOD随机变量的第k小矩不等式[J].湖北大学学报(自然科学版）.2017:3.

[5]张玉. WOD随机变量序列加权和完全收敛性及其应用[J].湖北大学学报(自然科学版).2023,45(5):695-701.

作者简介：

张奥楠（1993.10-），男，汉族，安徽合肥人，硕士，助教，研究方向：概率极限理论。