

借助错题资源，提高数学解题能力

张 超

江西省赣州市上犹中学南校区，中国·江西 赣州 341400

【摘 要】数学在高中阶段教学中有着非常重要的地位，影响着学生整体的学习成绩。高中数学内容比较多，具有词汇抽象性和逻辑性的特点，在学习中存在一定的难度，在解题过程中容易出错。高中数学解题教学的过程中，如何利用错题资源纠正学生的错误方法以提高学生的解题效率和质量是高中数学教师值得研究和探讨的。本文从错题资源的建立和利用出发，结合高中数学教学现状，提出几点高中数学解题教学的有效策略，用以提高高中数学解题教学质量。

【关键词】高中数学；解题教学；错题资源

高考复习中月考、周考、模拟考等等都是高考数学复习必不可少的环节，教师阅卷中会发现学生形形色色的错误，若能及时收集这些错误作为教学资源，认真分析错因，并及时纠正，总结解题规律，学生就能从解题错误中吸取教训，正确地掌握基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验（简称“四基”），更好地达到预防错误，矫正错误的目的，进而让学生提高解题能力。

1 发现种种错解

每次测试后讲评试卷，教师如能把学生在试卷上的典型错误一一展示列举出来，学生很是感兴趣，寻思错在何处，何错之有？并认真分析错解原因的话，那么这种讲评会在学生的大脑中产生深刻的影响，学生会难以忘记，分析错解的原因，比直接正面给予正确解答的效果要好得多。吃一堑，长一智。

案例1 已知函数 $f(x) = 2e^x(\ln x - a) + 1$ 。

(1) 若 $a = 0$ ，求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程；

(2) 若 $a > 1$ ，证明： $f(x)$ 存在极小值。

这是一次月考测试题，属于综合性题目，以指数型和对数型函数为载体，考查导数的几何意义和曲线的切线方程，利用导数证明函数存在极值的问题。阅卷中发现有如下错误：

(1) 导数求错， $f'(x) = 2e^x(\ln x + \frac{1}{x} - a) + 1$ 或 $f'(x) = \frac{2e^x}{x} - 2ae^x$ ；前者是把常数的导数求错，即误认为常数；后者是错记导数的公式。所以，熟练地掌握导数公式是规避错误的关键一步。

(2) 对解方程的含义不清，解方程就是求出方程中所有未知数的值。对超越方程 $\ln x + \frac{1}{x} - a = 0$ ，有一部分学生把它化为 $\ln x = a - \frac{1}{x}$ ，受解对数方程负迁移的影响化为

指数式，求解得 $x = e^{a - \frac{1}{x}}$ ，这种错误比较普遍，并说明 $a > 1$ ， $x, f'(x), f(x)$ 的变化如下：

x	$(0, e^{a - \frac{1}{x}})$	$e^{a - \frac{1}{x}}$	$(e^{a - \frac{1}{x}}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增

从上表可知， $f(x)_{\text{极小值}} = f(e^{a - \frac{1}{x}})$ 。从形式上看思维流畅，从格式上看毫不含糊，无懈可击，但就方程求解错，没认识到这样的方程无法用有限次代数运算解出其根，需要运用更加复杂的方法和技巧，如等价转化方法、数形结合法、用导数法进行推导和化简，找到其解的近似值或特殊值。如何规避这种错误？首先让学生了解解方程的含义，了解什么是超越方程？然后采用上述方法找到其解的近似值或特殊值。这样的话会避免类似错误的发生，这对于解决压轴题可以说是大有裨益的。

(3) 逻辑思维不严谨，令 $f'(x) = 2e^x(\ln x + \frac{1}{x} - a) = 0$ ，则转化为 $\ln x + \frac{1}{x} - a = 0$ ，即 $\ln x + \frac{1}{x} = a$ 。再令 $h(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ ($x > 0$)，则 $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$ 。易知 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减，在 $(1, +\infty)$ 上单调递增。

所以 $h(x)_{\min} = h(1) = 1$ ，所以 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减，在 $(1, +\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 存在极值。看上去，十分有道理，不难得出 $h(x) \in [1, +\infty)$ ，要使 $h(x)$ 与 $y = a$ 有交点，只需 $a \geq 1$ 即可，这点不仅被遗漏，而且仔细推

敲, 思维上还存在纰漏, 因为当 $a \leq 1$ 时, 由 $h(x)$ 有最小值, 不难得出 $f'(x) \geq f'(x)_{\min} = f'(1) = 1 - a \geq 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 故函数 $f(x)$ 不存在极值点。当 $a > 1$ 时, 因为 $f'(x)_{\min} = f'(1) = 1 - a < 0$, 又 $f'(\frac{1}{e^a}) = 2e^{\frac{1}{e^a}}(\ln \frac{1}{e^a} + e^a - a) > 0$ 且 $f'(e^a) = \frac{1}{e^a} > 0$, 所以 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 各存在一个零点, 即有两个零点。如何规避这种错误? 教学中帮助学生理解要准确, 要引导对问题过程每一步作出准确的判断, 防止单一的思维模式, 不必要时候教师在讲解时故设陷阱, 让学生先掉入其中再搭救; 在思考解题过程中, 不断反思自己的推理和假设, 以及识别可能存在的误区和偏见, 要确保自己的逻辑推理是严谨的, 是清晰和连贯的, 唯有这样才能避免思维陷入误区。

2 纠正错误, 强化解题的规范化

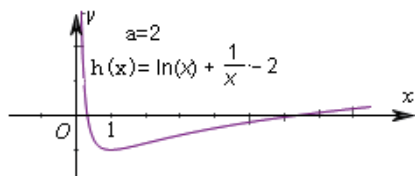
展示错误, 历数错误的种种情形时, 学生渴望正确地解答过程。在传授知识的过程中, 教师要规范书写表达, 而规范表达就是要遵守逻辑规律, 正确运用逻辑思维形式, 作出示范, 不能草率行事, 言必有据、行必有方是培养学生逻辑思维能力的有效途径。

正解: (1) 当 $a = 0$ 时, $f(x) = 2e^x \ln(x+1)$ ($x > 0$), 所以 $f'(x) = 2e^x(\ln x + \frac{1}{x})$ 。

所以切线的斜率 $f'(1) = 2e$, 又切点为 $(1, 1)$, 所以切线方程为 $2ex - y - 2e + 1 = 0$ 。

(2) 由已知得 $f'(x) = 2e^x(\ln x + \frac{1}{x} - a)$ (教师: 为什么要构造新函数? 没办法用初等方法求解 $f'(x) = 0$ 的解, 又 $2e^x > 0$ 恒成立, 所以针对因式 $\ln x + \frac{1}{x} - a$ 是否为 0 进行研究, 如何研究? 由导数法, 确定函数的单调性, 由此确定其隐性零点)

令 $g(x) = \ln x + \frac{1}{x} - a$, 则 $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$ 。当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $x > 1$ 时, $g'(x) > 0$ 。所以 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所



以 $g(x)_{\min} = 1 - a$ 。(能够由此断定 $f(x)$ 存在极值?)

因为 $a > 1$, 所以 $g(1) = 1 - a < 0$, $g(e^a) = \frac{1}{e^a} > 0$ (自变量 x 的取值很多, 又如何考虑到取 e^a 值, 这是数学解题“技术”, 不经过训练, 学生是无法掌握的难点, 也是无法积累数学活动的基本经验的)。

因为 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以存在 $x_0 \in (1, e^a)$, 使得 $g(x_0) = 0$, 当 $1 < x < x_0$ 时, $g(x) < 0$; 当 $x > x_0$ 时, $g(x) > 0$ 。进而当 $1 < x < x_0$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > x_0$ 时, $f'(x) > 0$ 。(以退为进, 步步为营, 直至追溯到原函数) 所以 $f(x)$ 在 $(1, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增, 故 $f(x)$ 存在极小值。

规范的解答能培养学生良好的解题习惯, 养成有理有据的分析问题的良好习惯和科学态度, 提高思维水平, 并且有利于提高成绩。

3 结束语

学生解题错误的原因有心理素质方面的原因、学习态度方面的原因、也有教师方面的原因。高考数学是追求对知识方法、内容掌握的正确性, 训练中不就是歪打正着, 着手成春。只有通过作业或考试答卷中发现错误, 教师从知识、技能、方法上多层次, 还要从心理上揣摩学生认知错误原因, 才能培养学生良好的审题意识、增强解题策略意识, 促使学生优化思维品质, 最终在学习上取得最大效益。学生要挑战自我, 一定意义上是对认知、推理、运算等错误的挑战, 从错误中汲取教训的一种刻骨铭心历练。一定要在寻求解决问题的过程中消除自身存在的“问题”隐患, 牢记“问题解决”不变的方法。

教学中知错、纠错是教与学双向共同的选择, 如果利用得好, 事半功倍, 用得不好, 单打一, 教学效果肯定会受到影响, 学生解题能力停滞不前。因此, 发现错误、修正错误是提高学生解题能力必备措施之一, 也是提高教学质量的有效途径之一, 必须重视。

参考文献:

- [1] 王玉立. 巧用错题集优化高中数学课堂教学质量[J]. 数理天地(高中版), 2025, (01): 144-146.
- [2] 苏华丹. 高中数学教学中减少学生易错题的策略研究[J]. 数学学习与研究, 2024, (19): 56-58.